Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 03 27/09/17

(*) ricevimento il venerdì alle 9.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

---

$X$ spazio vettoriale. Prodotto scalare:

$x, y \in X \to x \cdot y \in \mathbb{R}$ bilineare, simmetrico, positivo ($x \cdot x > 0$ se $x \neq 0$)

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ (NORMA)

ESEMPIO $X = \mathbb{R}^N$, $x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_N \cdot y_N$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_N \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_N \end{pmatrix}$

NORMA (EUCLIDEA) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$

**Def.** Dato $X' \subset X$ sottospazio, definisco l'ortogonale di $X'$

$$(X')^\perp = \{ y \in X : y \cdot x = 0 \ \forall x \in X' \}$$

$(X')^\perp$ è anche lui un sottospazio vettoriale.

**Def.** Dico che $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ è una base ortogonale se (è una base per $X$) e se $e_i \cdot e_j = 0$ quando $i \neq j$

$\mathcal{B}$ è ortonormale se $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases}$ ($\|e_i\| = 1$)

**Oss.** Se $e_1 \dots e_N$ sono ortogonali $\neq 0$ $\Rightarrow$ $e_1 \dots e_N$ sono lin. ind.

Infatti supponiamo che $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N = 0$

Facciamo il prodotto scalare con $e_j$ $(j = 1 \dots N)$ $\Rightarrow$

$$\lambda_j e_j \cdot e_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_j \|e_j\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Lo ripeto $\forall j$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$

**Oss.** Se $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ è una base ortonormale $\Rightarrow$

Dato $v \in X$ $\Rightarrow$ $\underbrace{v = v_1 e_1 + \dots + v_N e_N}_{\circledast}$ dove $(v_j = v \cdot e_j)$

$$v_1 = v \cdot e_1 \quad \dots \quad v_N = v \cdot e_N$$

Infatti se moltiplico $\circledast$ per $e_j$ trovo

$$v \cdot e_j = v_j \cdot (e_j \cdot e_j) = v_j$$

---

Appl. bilineare $b : X \times X \to \mathbb{R}$ (abbiamo già visto la def.)

**Def.** FORMA QUADRATICA Chiamo forma quadratica su $X$ (spazio vett.) una funzione $\phi : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(x) = b(x, x)$$ per una opportuna $b$ bilineare

**NOTA** se $\phi$ è quadratica $\phi(tx) = t^2 \phi(x)$ (ora non basta)

PER ES. $\phi(x, y) = 3x^2 - 5xy + 2y^2$ è una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$. Infatti se prendo

$$b((x,y), (x',y')) = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \leftarrow \text{bilineare}$$

$$b((x,y), (x,y)) = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} 3x - 5/2\, y \\ -5/2\, x + 2y \end{pmatrix} =$$

$$3x^2 - \frac{5}{2}xy - \frac{5}{2}xy + 2y^2 = 3x^2 - 5xy + 2y^2 = \phi(x, y)$$

Quindi $b((x,y),(x',y')) = 3xx' - \frac{5}{2}xy' - \frac{5}{2}x'y + 2yy'$

FATTO (1) Se $b$ è una applicazione bilineare su $X \times X$ e se in $X$ c'è un prodotto scalare $\Rightarrow$

$\exists\ L : X \to X$ lineare tale che $b(x,y) = Lx \cdot y$

(2) Se metto in $X$ una base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_N\}$

$$b(x,y) = [y]_{\mathcal{B}}^t \cdot A\,[x]_{\mathcal{B}}$$

per $A$ matrice $N \times N$. Anzi

$$A = \{a_{ij}\} \quad \text{dove} \quad a_{ij} = b(e_i, e_j)$$

(3) Se $\phi$ è una forma quadratica $\Rightarrow$ TROVO UNA MATRICE $A$

tale che $\boxed{\phi(x) = [x]_{\mathcal{B}}^t\, A\, [x]_{\mathcal{B}}}$

INOLTRE POSSO SEMPRE SUPPORRE CHE $A$ sia simmetrica

INFATTI POSSO SEMPRE SOSTITUIRE $A$ con $\frac{A + A^t}{2}$ :

PERCHÈ se $[x]_{\mathcal{B}}^t A^t [x]_{\mathcal{B}} = \left([x]_{\mathcal{B}}^t A\,[x]\right)^t$ ← NUMERO DUNQUE POSSO TOGLIERE $t$

($t$ INDICA IL TRASPOSTO)

Ex $\phi(\underbrace{x,y,z}_{v}) = \underbrace{(x,y,z)}_{v^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \overset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} =$

$(x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ VIENE. (POSSO METTERE $\frac{A + A^t}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

---

PERCHÉ VOGLIO A SIMMETRICA ??

**Teorema** Se $A$ è simmetrica $\Rightarrow \exists\ e_1 \dots e_N$ vettori ortogonali.
$\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che $e_1 \dots e_N$ è una base
e $Ae_i = \lambda_i e_i$ ($\lambda_i$ autovalori, $e_i$ autovettori)

**CONSEGUENZA** Se $A$ è simmetrica:

(1) Esiste una base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ ortonormale tale che rispetto a $\mathcal{B}$ l'applicazione lineare si rappresenta con una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$

(2) $\exists\ M$ matrice tale che $M^t M = M M^t = I$ e
$M^t A M = D(\lambda_1 \dots \lambda_N)$ ←

(1) Se $e_1 \dots e_N$ sono autovettori di $A$ di autov. $\lambda_1 \dots \lambda_N$
Se $v = v_1 e_1 + \dots + v_N e_N \Rightarrow$

$$Av = v_1 Ae_1 + \dots + v_N Ae_N = \lambda_1 v_1 e_1 + \dots + \lambda_N v_N e_N$$

Rispetto a $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ le coordinate di $Av$ sono

$$[Av]_{\mathcal{B}} = (v_1\lambda_1, \dots, v_N\lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

(2) Ricordo che la matrice $M = (e_1 \dots e_N)$ rappresenta il cambio di base da $\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N)$ $\quad \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ...

Dato che $e_i e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \Rightarrow M^t M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = MM^t$

DUNQUE $\boxed{M^t = M^{-1}}$ (discende dal fatto che $e_1 \dots e_N$ ortonormali)

da cui $M^t$ rappresenta il cambio di base da $\hat{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$

Mettendo tutti insieme trovo che $M^t A M = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$

---

## TROVARE LA "SEGNATURA" DI UNA FORMA QUADRATICA

Ricordo che $\phi = b(x,x) \left(= [x]^t A [x]\right)$ si dice

- Definita positiva se $\phi(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
  (negativa) $(< 0)$
- Semidefinita positiva se $\phi(x) \geq 0 \quad \forall x$
  (negativa) $(\leq 0)$
- Indefinita se ci sono almeno due vettori $v_1, v_2 \in X$ con $\phi(v_1) < 0 < \phi(v_2)$

DA QUANTO FATTO RISULTA:

Dato una forma quadratica $\phi : X \to \mathbb{R}$ $X$ sp. vett. di dim $N$.
Dato una base $\mathcal{B}$ ortonormale in $X \to$ trovo $A$ tale che

$$\phi(x) = [x]_{\mathcal{B}}^t A [x]_{\mathcal{B}} \qquad \left(\text{se siamo in } \mathbb{R}^N = X \quad x = [x]_{\hat{\mathcal{B}}}\right)$$

$A$ la prendo simmetrica $\to$ trovo $e_1 \dots e_N$ autovettori ortonormali
$\lambda_1 \dots \lambda_N$ autovalori reali. ALLORA

- $\phi$ definita positiva $\iff$ $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots N$
  (negativa) $(\lambda_i < 0)$
- $\phi$ semidefinita positiva $\iff$ $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots N$
  (negativa) $(\lambda_i \leq 0)$

- $\phi$ indefinito $\iff$ $\exists\, \lambda_i > 0$ $\exists\, \lambda_j < 0$

---

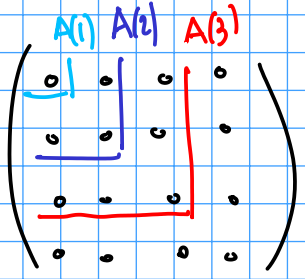
POSSO PERÒ TROVARE LA "SEGNATURA" SENZA CALCOLARE I $\lambda_i$

Teorema (criterio di Sylvester) Sia $A$ $N \times N$

(1) Chiamo MINORE PRINCIPALE di $A$ una sottomatrice di $A$ cancellando da $A$ lo stesso "set" di righe e di colonne

Per es $A = \begin{pmatrix} \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ (cancello la II e la III riga e la II e la IV colonna)

(2) Chiamo MINORE PRINCIPALE DOMINANTE K-esimo, $1 \le K \le N$ la sottomatrice ottenuta cancellando le ultime $N-K$ righe e le ultime $N-K$ colonne




$A = A(4)$

CRITERIO • $A$ è def. Positivo $\iff$

$$\det(A(K)) > 0 \qquad K = 1 \dots N$$

• $A$ def. negativo $\iff$ $-A$ def positivo $\iff$

$$(-1)^K \det(A(K)) > 0 \qquad K = 1 \dots N$$

• $A$ è semidefinito positivo $\iff$ $\det(A') \ge 0$ $\forall A'$ minore principale

• $A$ è semidef. negativo $\iff$ $-A$ è semidef pos.

## ESEMPIO

$$\phi(x,y,z) = -3x^2 + y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}\,xz \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

La matrice A simmetrica che "rappresenta" $\phi$ è

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Che segnatura ?!?

- $a_{11} = -3 < 0$ ( A può essere indefinita o def. negativa - o semidef.)
- $\det A(2) = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 < 0 \implies$ INDEFINITA
- $\det A = 4 > 0$

( BASTA $a_{11} < 0$, $A(2) < 0$, $\det A \neq 0$ )

DUNQUE $\phi$ È INDEFINITA.

Per completezza calcoliamo autovalori / autovettori di A ..

Mi serve il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(\lambda+3)(\lambda+2) - 2\right] =$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 + 5\lambda + 4\right)$$

RADICI DI $P(\lambda) \longrightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -4$ ( UN AUTOV. $> 0$, DUE AUTOV. $< 0$ )

Calcolo anche gli autovettori.

$\lambda_1 = 1$ devo risolvere $\begin{cases} -3x + \sqrt{2}z = x \\ y = y \\ \sqrt{2}x - 2z = z \end{cases}$ $\begin{cases} -4x + \sqrt{2}z = 0 \\ y = y \\ \sqrt{2}x - 3z = 0 \end{cases}$

$x = z = 0$ $y$ arbitrario posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ devo risolvere $\begin{cases} -3x + \sqrt{2}z = -x \\ y = -y \\ \sqrt{2}x - 2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2x + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - z = 0 \end{cases}$

$\iff y = 0 \quad z = \sqrt{2}x$ posso prendere $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -4$ devo risolvere $\begin{cases} -3x + \sqrt{2}z = -4x \\ y = -4y \\ \sqrt{2}x - 2z = -4z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases} \iff$

$y = 0 \quad x = -\sqrt{2}z$ posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

SI VEDE FACILMENTE CHE $(e_1, e_2, e_3)$ sono ortogonali - se li voglio ortonormali devo prendere

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

DUNQUE SE

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \left( = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \right)$$ si ha

$$M A M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$