Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 26/09/17

(*) ricevimento il venerdì alle 9.30 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Nella prima lezione:

- Richiami sugli spazi vettoriali: definizione, combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti, basi, dimensione.
- Se X ha dimensione N e $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ è una base per $X \Rightarrow$

  $\forall u \in X \ \exists!\ (c_1 \dots c_N) \in \mathbb{R}^N$ tale che $u = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N$.

  esistono unici $c_1 \dots c_N \in \mathbb{R}$: $u = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N$. Chiamo $(c_1 \dots c_N)$ le coordinate di u in $\mathcal{B}$ e scrivo $(c_1 \dots c_N) = [u]_{\mathcal{B}}$
- Esempio di uno spazio vettoriale di dimensione infinita
- Applicazioni lineari e rappresentazione mediante matrici

  $L : X \to X'$ lineare, $\mathcal{B}$ base su X, $\mathcal{B}'$ base su X'

  esiste una matrice $A = A_{L,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ tale che

$$[Lu]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

($\cdot$ è il prodotto riga x colonna)

si ha $A = \{ [Le_1]_{\mathcal{B}'} \dots [Le_N] \}$

dove $\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_N\}$ (quindi $\dim(X) = N$). Noto che se $\dim(X') = M$ la matrice A è $M \times N$.

- Applicazioni bilineari (definizione, simmetrie, positività)
- Prodotto scalare = appl. bilineare simmetrica e positiva
  Norma indotta da un prodotto scalare.

LEZIONE 2

Prodotto scalare su X (spazio vettoriale)

Prodotto scalare = applicazione bilineare $(x, y) \to x \cdot y$ con le proprietà:

- $\left.\begin{cases} (x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y \\ x \cdot (y_1 + y_2) = x y_1 + x y_2 \\ (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y) = x \cdot (\lambda y) \end{cases}\right\}$ bilinearità
- $x \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$ positività
- $x \cdot y = y \cdot x$ simmetria

Se ho un prodotto scalare $\Rightarrow$

NORMA DI UN VETTORE

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ (per ogni x di X)

Teorema Se ho un prodotto scalare vale la disuguaglianza (di Schwartz)

(S) $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X$

Siano $x, y \in X$

Dim. Prendo $t \in \mathbb{R}$ e considero la funzione di t:

$$\varphi(t) := \|x+ty\|^2 = (x+ty)\cdot(x+ty) =$$

$$x\cdot x + \underbrace{x\cdot(ty) + (ty)\cdot x}_{= \text{per la simmetria}} + (ty\cdot ty) = \underbrace{\|x\|^2 + 2t(x\cdot y) + t^2\|y\|^2}$$

DUNQUE φ è un polinomio di II° grado di cui so che $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t$. (Se $y=0$ la (S) è ovvia, quindi supporrò $y \neq 0$)

Quindi φ deve avere discriminante $\Delta \leq 0$. Questo significa

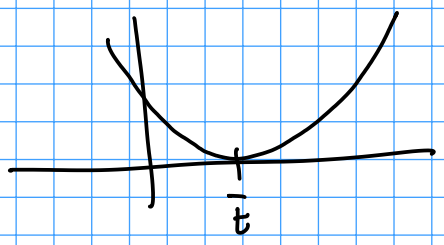
$$0 \geq \Delta = b^2 - 4ac = 4(x\cdot y)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \iff$$

$$(x\cdot y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \iff |x\cdot y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

DOMANDA Quando vale l'uguaglianza in (S) ?? Quando

$$x\cdot y = \|x\|\cdot\|y\|$$

Se questo succede ho $\Delta = 0 \Rightarrow$ φ ha una sola radice $\bar{t}$ che corrisponde al minimo di φ



chi è $\bar{t}$?! Faccio $\varphi' \to$

$$\varphi'(t) = \underline{2t\|y\|^2 + 2x\cdot y}$$

$\Rightarrow$ $\bar{t}$ è tale che $\varphi'(\bar{t}) = 0$ cioè

$$\boxed{\bar{t} = -\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}}$$

. IMPONGO $\varphi(\bar{t}) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \varphi(\bar{t}) = \|x+\bar{t}y\|^2 \iff x+\bar{t}y = 0$$

$$\iff x = -\bar{t}y \qquad x \text{ e } y \text{ SONO LIN. DIPENDENTI}$$

$$\left(x = \frac{x\cdot y}{\|y\|^2}y\right) \qquad (\text{e si vede che } x\cdot y \geq 0)$$

[DUNQUE VALE "=" IN S $\Leftrightarrow$ x e y SONO ALLINEATI E CONCORDI]

CONSEGUENZA DI Schwartz

Teor. $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ VERIFICA LA DIS. TRIANGOLARE CIOÈ

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dim. Posso al quadrato (sono tutti termini ≥ 0)

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

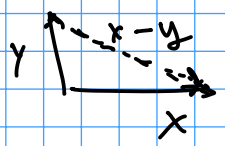
$$\Uparrow$$

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$ DUNQUE O.K.

OSS. Come interpreto l'eguaglianza

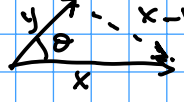
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2$$

Se $x \cdot y = 0$ (vettori ortogonali)



TEOR. DI PITAGORA

Se no la formula corrisponde al TEOR. DI CARNOT perché



$\|x\| = a$ $\|y\| = b$ $\|x-y\| = c$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2 \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} bc$$

tra -1 e 1 quindi la posso interpretare come $\cos(\theta)$

- Le altre due proprietà della norma sono ovvie

NOTA IN GENERALE (come vedremo) si può avere una norma nello spazio X (cioè una funzione $x \to \|x\|$ con le proprietà scritte ieri) SENZA CHE CI SIA UN PROD SCALARE per cui $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

Però se c'è un prod. scalare è meglio !