Analisi Matematica II
Lezione 66
24 maggio 2016

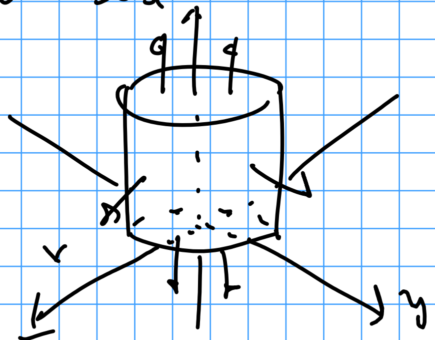
ESERCIZIO Consideriamo

$$\vec{f}(x,y,z) := x^2 z \sin(xy)\,\vec{i} + 2x\cos(yz)\,\vec{j} + z^2|xy|\,e^{x^2+y^2}\,\vec{k}$$

Calcolare il flusso di $\vec{f}$ attraverso ∂C, dove

$$C = \{ x^2+y^2 \le 1, \quad 0 \le z \le 1 \}$$

C è il cilindro con base il cerchio di raggio 1 e altezza 1



$\partial C = B_0 \cup B_1 \cup L$

su B_0 $\vec{\nu} = -\vec{k}$

su B_1 $\vec{\nu} = \vec{k}$

su L $\vec{\nu}$ = verso fuori

B_0 = Base = $\{x^2+y^2 \le 1, z=0\}$

B_1 = coperchio = $\{x^2+y^2 \le 1, z=1\}$

L = Sup. laterale = $\{x^2+y^2=1, 0 \le z \le 1\}$

Se dovessi applicare la def. di flusso dovrei fare

$$\Phi(\vec{f}, \partial C) = \Phi(\vec{f}, B_0) + \Phi(\vec{f}, B_1) + \Phi(\vec{f}, L)$$

Conviene usare il t. della divergenza

$$\Phi(f, \partial C) = \iiint_C \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_C \Big(\underbrace{2x\, z \sin(yz) + 2x(-\sin(yz)) \cdot z}_{=0} + 2z\,|xy|\, e^{x^2+y^2} \Big)\, dx\,dy\,dz$$

(in coordinate cilindriche: $z = z$, $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^1 \rho\, d\rho \left(2z\, |\rho\cos\theta\, \rho\sin\theta|\, e^{\rho^2} \right) =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} |\sin\theta\cos\theta|\, d\theta}_{(1)} \underbrace{\int_0^1 2z\, dz}_{(2)} \underbrace{\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\, d\rho}_{(3)}$$

$$(1) = 4\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\, d\theta = \left[-\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$(2) = \left[z^2\right]_0^1 = 1$$

(3) $s = \rho^2 \quad ds = 2\rho\, d\rho \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 s e^s\, ds =$ (per parti)

$$\frac{1}{2}\left[s e^s\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^s\, ds = \frac{1}{2}e - 0 - \frac{1}{2}\left[e^s\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

DUNQUE $\Phi(\vec{f}, \partial C) = 1$

- CERCARE DI CALCOLARE I TRE FLUSSI di $\vec{f}$ su $B_0 / B_1 / L$

$\boxed{B_0} \rightarrow \displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \vec{f}(x,y,0)\cdot(-\vec{k})\, dx\, dy =$

$$= -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} f_3(x,y,0)\, dx\, dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} 0\, dx\, dy = 0$$

$f_3(x,y,z) = z^2|xy|e^{x^2+y^2}$

$\boxed{B_1} \rightarrow \displaystyle\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \vec{f}(x,y,1)\cdot\vec{k} =$

$$\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} |xy|\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 |\rho\cos\theta\, \rho\sin\theta|\, e^{\rho^2}\rho\, d\rho =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} |\sin\theta\cos\theta|\, d\theta}_{(1)} \underbrace{\int_0^1 \rho^2 e^{\rho^2}\rho\, d\rho}_{\text{pezzo } 3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

PER DIFFERENZA $\Phi(\vec{f}, L) = 0$

Infatti $1 = \Phi(\vec{f}, \partial C) = \underbrace{\Phi(\vec{f}, B)}_{=0} + \underbrace{\Phi(\vec{f}, B_1)}_{=1} + \Phi(\vec{f}, L)$

- ESISTE UN POTENZIALE VETTORE PER $\vec{f}$??

<u>NO</u> (la divergenza di $\vec{f} \neq 0$)

<u>ESERCIZIO</u> Considero la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = f(x) \qquad \text{(per le } x \text{ in cui converge)}$$

(a) TROVARE IL RAGGIO DI CONV. $\bar{R}$

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+1}\right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{L} = 1$$

(b) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Dalla teoria so che:

se $|x| < 1$ la serie converge $\quad (1 = \text{raggio di conv.})$

se $|x| > 1$ la serie non converge

RIMANE DA CAPIRE COSA SUCCEDE IN $x = 1$, $x = -1$

$x = 1$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ DIVERGE (armonica di esp. 1)

$x = -1$ " " " $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ CONVERGE (Leibniz)

$\Rightarrow$ la serie conv. per $x \in [-1, 1[$

(c) Dimostrare che, se $-1 < x < 1$ si ha

$$f(x) + x f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Basta usare i teoremi di derivazione per serie:

$$f(x) + x f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(conosco la somma della serie geometrica!)

(d) Usare la (c) per calcolare esplicitamente $f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$$x f'(x) = -f(x) + \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < 1$$

$$(E) \quad \boxed{f'(x) = -\frac{1}{x} f(x) + \frac{1}{x} \frac{1}{1-x}} \qquad -1 < x < 1 \quad x \neq 0$$

So ANCHE CHE $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n+1} = 1$ (rimane il termine noto)

$$\left(\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \underset{n=0}{\underset{\uparrow}{1}} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)$$

Posso risolvere l'equazione diff. lineare (E)

$$\left[\text{FORMULA:} \quad y' = a(x) y + b(x) \Rightarrow y(x) = e^{A(x)} \left\{ c + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \right\} \right.$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$\left. \text{dove } A(x) = \int a(x)\,dx \right]$$

$$a(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = -\ln(x) = \ln \frac{1}{x} \Rightarrow e^{A(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(c + \int x \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{1-x}\,dx \right) =$$

$$\frac{1}{x}\left(c+\int\frac{1}{1-x}\,dx\right)=\frac{1}{x}\left(c-\ln(1-x)\right)$$

$$f(x)=\frac{c-\ln(1-x)}{x}$$ con c da determinare

c DEVE FARE ZERO PERCHÈ $f(0)=1$

se faccio $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}}{1}=1$

se fosse $c\neq 0$ troverei $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

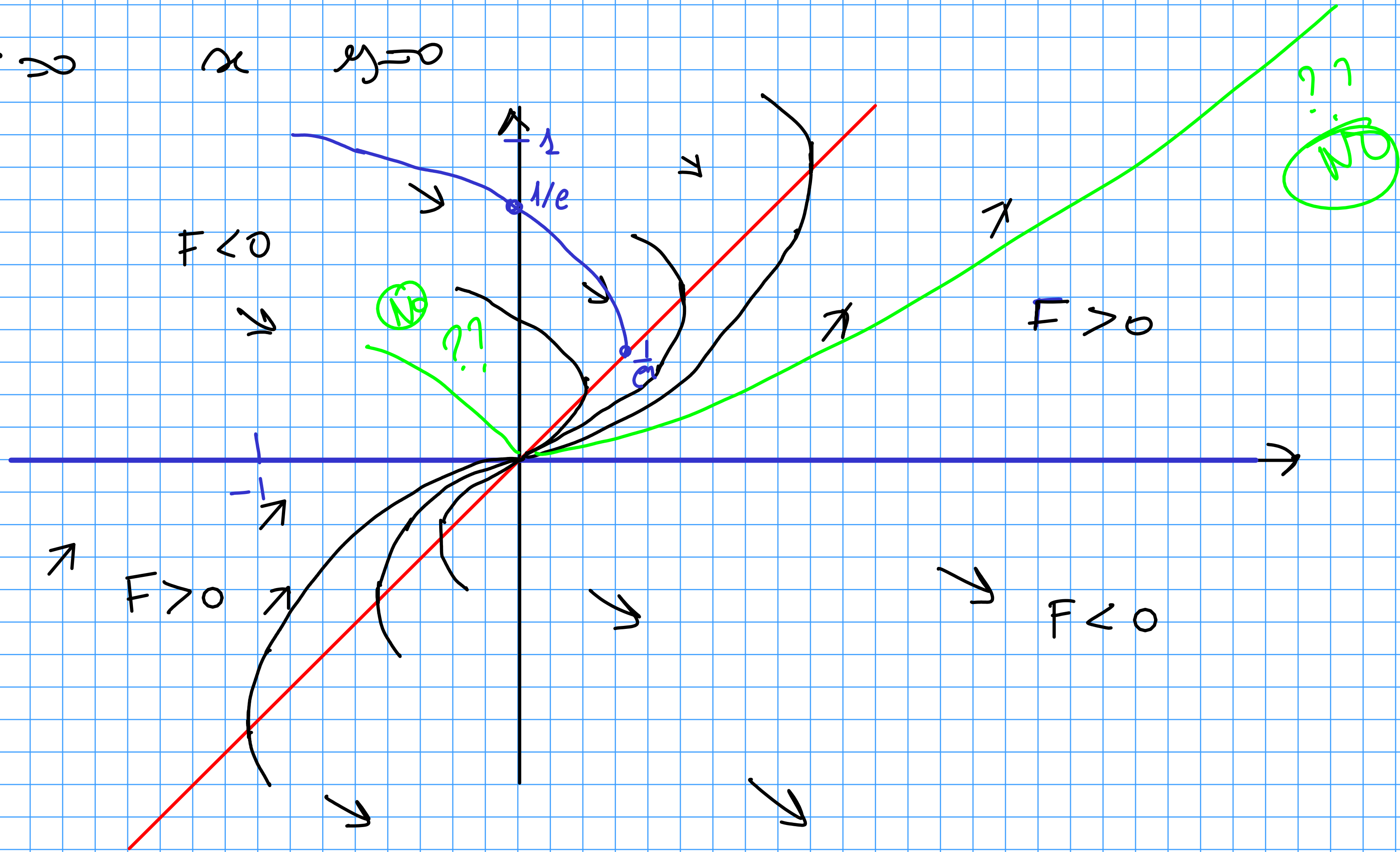
mentre se $c=0$ TORNA $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=1$

DUNQUE $$\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{-\ln(1-x)}{x}$$ $\left(x\neq 0,\ 1 \text{ se } x=0\right)$
$|x|<1$

ESERCIZIO

$$y' = \frac{y}{x-y} = F(x,y)$$

- F è definita x $x \neq y$ (fuori dalla bisettrice)
- $F \geq 0$ x $y \geq 0$



TROVARE $\lambda = \lambda(y)$ FATTORE INTEGRANTE

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda(y)\, y = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(y)(y-x) \iff$$

$$\lambda'(y)\, y + \lambda(y) = -\lambda(y) \iff \lambda' = -\frac{2\lambda}{y}$$

$$\lambda = \frac{c}{y^2} \qquad \left(\text{per es. } \lambda(y) = \frac{1}{y^2}\right)$$

DUNQUE IL CAMPO

$$\frac{1}{y}\vec{i} + \frac{y-x}{y^2}\vec{j}$$ è irrotazionale

Lo voglio conservativo, cioè mi serve ϕ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{y-x}{y^2} \implies$$

$$\phi(x,y) = \frac{x}{y} + c(y) \implies \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = -\frac{x}{y^2} + c'(y)$$

che deve essere eguale a $\frac{y}{y^2} - \frac{x}{y^2} \iff c'(y) = \frac{1}{y} \iff$

$$c(y) = \ln|y|$$

HO TROVATO $\phi(x,y) = \frac{x}{y} + \ln|y|$

DUNQUE, se $y(x)$ è soluzione, $\frac{x}{y} + \ln|y| = \text{costante}$

- DESCRIVERE LA SOLUZIONE CHE PARTE DA $(-1,1)$.

$\frac{x}{y} + \ln|y| = c$; metto $x=-1$ $y=1$ $\Rightarrow$ $c=-1$

$\Rightarrow -\frac{x}{y} = 1 + \ln|y| \iff x = \underbrace{-y(1+\ln|y|)}_{g(y)}$

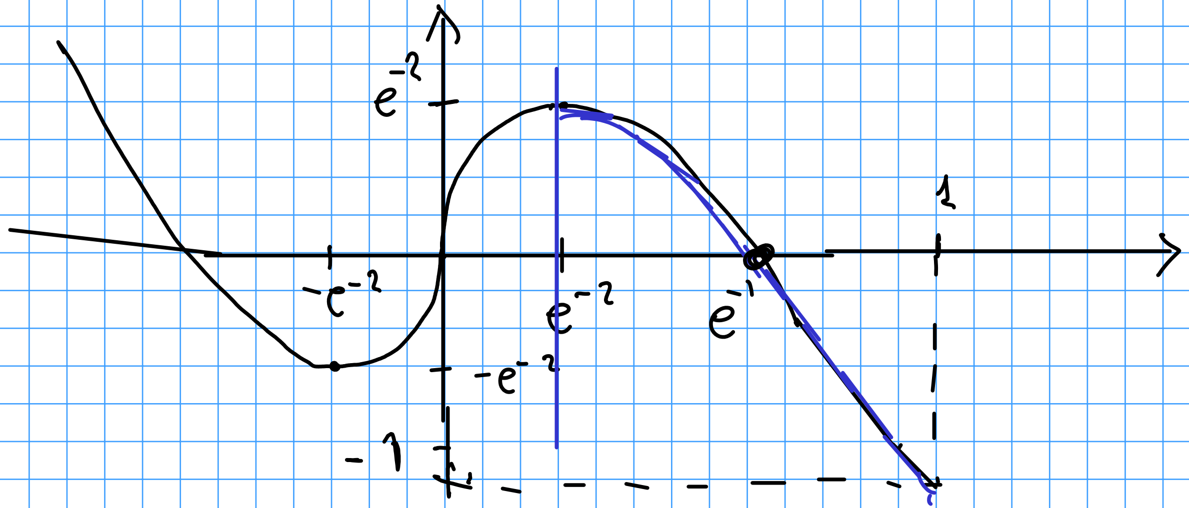
DOMINIO $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim_{y\to-\infty} g(y) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{y\to+\infty} g(y) = -\infty$

$\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ (vince y su $\ln|y|$)

$g'(y) = -(1+\ln|y|) - y\frac{1}{y} = -1-\ln|y| - 1 = -2-\ln|y|$

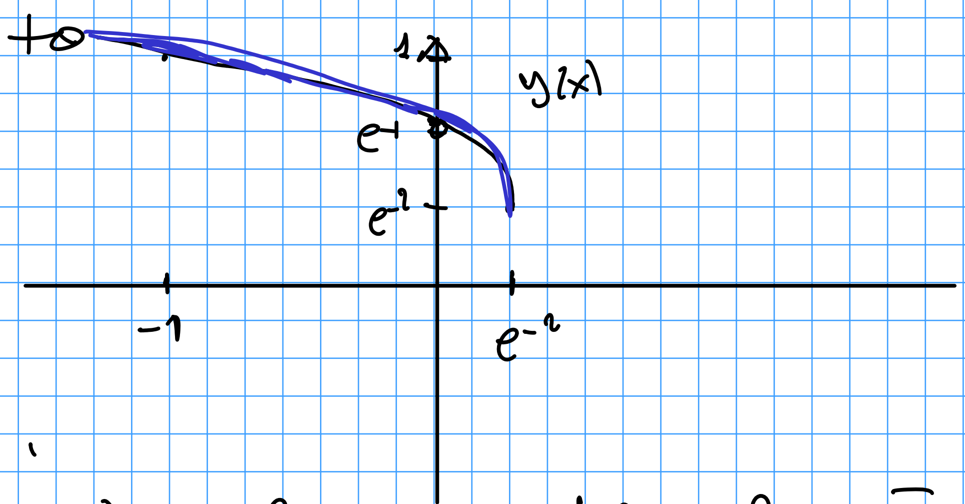
$g'(y)=0 \iff |y| = e^{-2} \iff y = \pm e^{-2}$



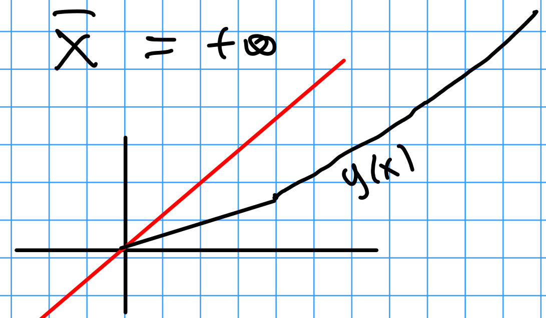
$g(1) = -1$

$g(e^{-1}) = g(-e^{-1}) =$

Per ricavare $y(x)$ devo invertire $g(y) = x$. Lo posso fare tra e^{-2} e $+\infty$



- Ci sono $y(x)$ soluzioni tali che $\bar{x} = +\infty$



Una tale $y(x)$ deve comunque verificare
$0 < y(x) < x$ per $x > 0$

$\Rightarrow$ y crescente

$$\phi(x,y) = \frac{x}{y} + \ln|y| = \text{costante}$$

DUE POSSIBILITÀ: (1) $y(x) \to \bar{y} \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{y} \geq y(1) > 0$

(2) $y(x) \to +\infty$

IL CASO (2) NON È POSSIBILE perché allora

$$\phi(x,y) \geq \ln|y| \to +\infty$$

IL CASO (1) NEMMENO. INFATTI

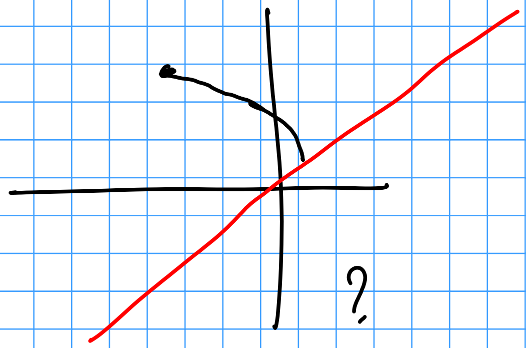
$$\frac{x}{y} + \ln(y) \to \frac{+\infty}{\bar{y}} + \ln(|\bar{y}|) = +\infty$$

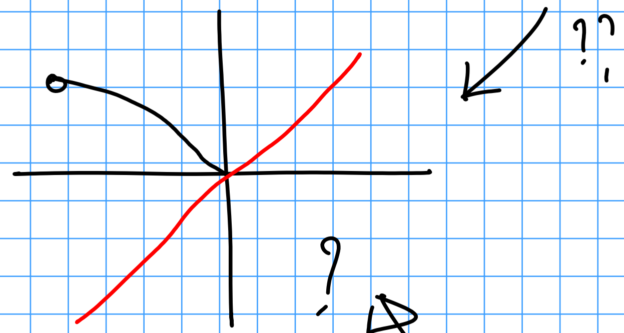
DUNQUE NESSUNA $y(x) > 0$ ESISTE $\forall x > 0$.

TUTTE VANNO SULLA RETTA ROSSA IN TEMPI FINITI

- SUPPONIAMO $(x_0, y_0) \in II^{\circ}$ QUADRANTE $x_0 < 0$ $y_0 > 0$

$\Rightarrow$ PUÒ ESSERE $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$





$\boxed{\text{NON È POSSIBILE}}$

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{y} + \ln|y| = \text{costante}$$

perché $x<0$, $y>0$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{y}<0$, $\ln|y| \to -\infty$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) \to -\infty$$