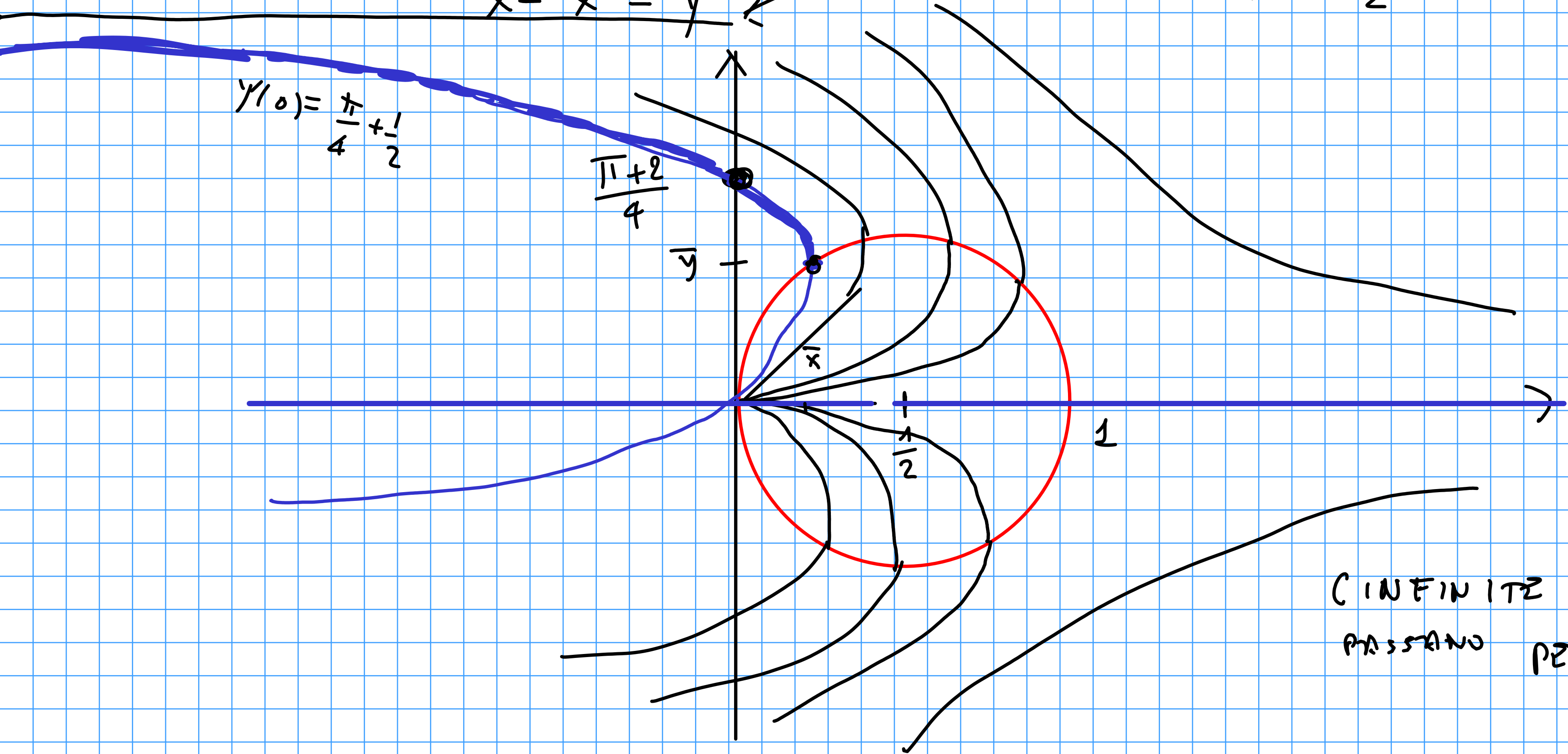
Analisi Matematica II
Lezione 65
23 maggio 2016

$$y' = \frac{y}{x - x^2 - y^2}$$

asintoto in $y = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$



(INFINITE SOL. PASSANO PER (0,0))

• Trovare $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$ fattore integrante

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda(x^2+y^2)\,y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda(x^2+y^2)(x^2+y^2-x)\Big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda'(x^2+y^2)\,2y\,y + \lambda(x^2+y^2) = \lambda'(x^2+y^2)\,2x\,(x^2+y^2-x) + \lambda(x^2+y^2)(2x-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda'(x^2+y^2)\Big[2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 + 2x^2\Big] = \lambda(x^2+y^2)\Big[-1 + 2x - 1\Big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda'(x^2+y^2)\,(x^2+y^2)\big(\overset{1}{\cancel{2-2x}}\big) = \lambda(x^2+y)\big(\overset{-1}{\cancel{2x-2}}\big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda'(x^2+y^2) = -\frac{\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \lambda'(t) = \frac{-\lambda}{t} \iff \lambda(t) = \frac{c}{t}$$

$$\lambda'(x,y) = \frac{c}{x^2+y^2} \qquad \text{per es. } \lambda = \frac{1}{x^2+y^2}$$

• TROVIAMO UN INT. PRIMO: CERCO POTENZIALE Φ

Per il campo:

$$\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}\vec{j} = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \left(1-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{j}$$

deve essere

(A) $\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{y}{x^2+y^2}$ (B) $\frac{\partial}{\partial y}\phi = 1-\frac{x}{x^2+y^2}$

$$(A) \rightarrow \phi = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} = \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$$

(B) deriso ϕ trovato rispetto a y:

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + c'(y) = \frac{-x}{y^2\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)} + c'(y) =$$

$$c'(y) - \frac{x}{x^2+y^2}$$ che (IMPONGO B) implica

$c' = 1$ cioè $c(y) = y + c$

$$\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y \qquad (+\, c)$$

• DUNQUE SE $y(x)$ RISOLVE L'EQ $\Rightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\arctan\left(\frac{x}{y(x)}\right) + y(x) = c \quad \Longleftrightarrow$$

$$\arctan \frac{x}{y} = c - y \qquad (\star)$$

$$\Downarrow$$

$$x = y \tan(c - y)$$

PROVIAMO A DISEGNARE LA SOL. TALE CHE

$y(0) = \frac{\pi+2}{4}$ (usando $\star$)

Deve valere $\star$ $\Rightarrow$ metto $x=0$ $y = \frac{\pi+2}{4}$; TROVO

$$0 = c - \frac{\pi+2}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi+2}{4}$$

Quindi $x = y \tan\left(\frac{\pi+2}{4} - y\right) =: g(y)$

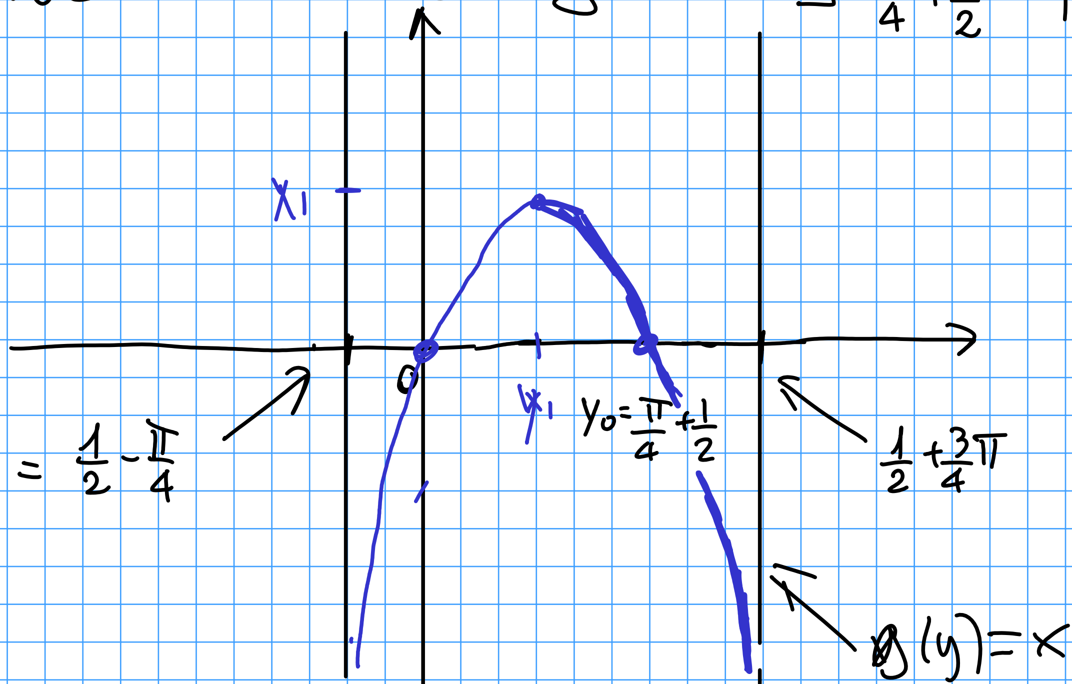
Studiamo $g(y)$

- DOMINIO : $y : \frac{\pi+2}{4} - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff$

$$y \neq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + k\pi$$

A ME SERVE IL "PEZZO DI g" CHE CONTIENE $y_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

DUNQUE CONSIDERO g su $\left]-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right[$



$$\lim_{y \to \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^+} g(y) = -\infty$$

$$\lim_{y \to \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)^-} g(y) = -\infty$$

$$\lim_{y\to\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^+} y \tan\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}+\tfrac{\pi}{4}-y}_{t}\Big) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-t\right)\tan(t) = -\infty$$

$$\lim_{y\to\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\pi\right)} y \tan\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-y\right) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-t\right)\tan(t) = -\infty$$

$$g\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \quad \Big| \; g(0)=g\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

??

$$g'(y) = \tan\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}-y\right) + y\,\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}-y\right)^2+1}$$

DUNQUE LA SOL. CON $y(0)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ HA UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER $y\to-\infty$ di ordinata $y=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

QUESTO SI PUÒ VEDERE ANCHE IN MODO DIRETTO:

$$\phi(x,y)=c. \iff \arctan\left(\frac{x}{y}\right)+y = c$$

METTO $y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ $x=0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

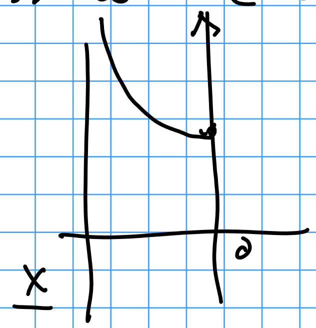
$$\boxed{\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

SO CHE y è decrescente (LO VEDO DALL'EQUAZIONE)

CI SONO VARIE POSSIBILITÀ:

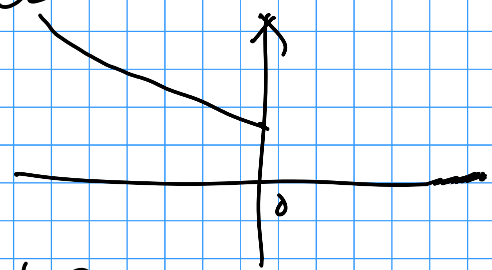
(1) IL TEMPO $\underline{x} < 0$ ammissibile e sinistro è finito e

$$\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x) = +\infty$$



IN QUESTO CASO TROVO $\frac{x}{y} \to 0 \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} \to 0$

$\Rightarrow \phi(x,y) \to +\infty = +\infty$ IMPOSSIBILE



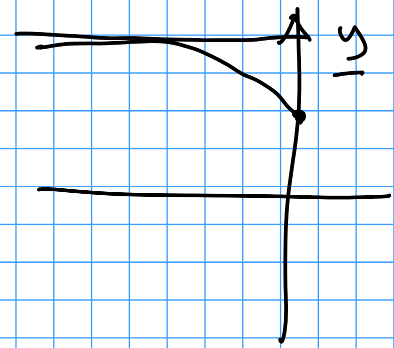
(2) $\underline{x} = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$

ANCHE IN QUESTO CASO $\phi(x,y) \to +\infty$

PERCHÉ $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ è limitata e $y \to +\infty$

IMPOSSIBILE

(3) $\underline{x} = -\infty$ $\quad \underline{y} = \lim_{x \to -\infty} y(x) \in \mathbb{R}$



$\left(\underline{y} \geq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} > 0\right)$

DEVE ESSERE

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x, y(x)) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to \underline{y}}} \arctan \frac{x}{y} + y = -\frac{\pi}{2} + \underline{y}$$

$$\iff \underline{y} = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \qquad (\text{TORNA})$$

- DOVE FINISCE QUESTA $y(x)$??

VA IN UN PUNTO $(\bar{x}, \bar{y})$ NEL CERCHIO ROSSO

CIOÈ IN $\bar{x}, \bar{y}$: $\quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{x} = 0$

INOLTRE $\quad \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad$ SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

NON MI PARE SEMPLICE DA RISOLVERE

ALTRO ESERCIZIO SIMILE

$$y' = \frac{2xy^2(1-y)}{x^2y^2+1} \qquad \left(=: F(x,y) \right)$$

- L'EQUAZIONE È RISOLUBILE CON QUALUNQUE DATO INIZIALE perché $F(x,y)$ $\exists$, derivabile $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (denominatore ≥ 1)

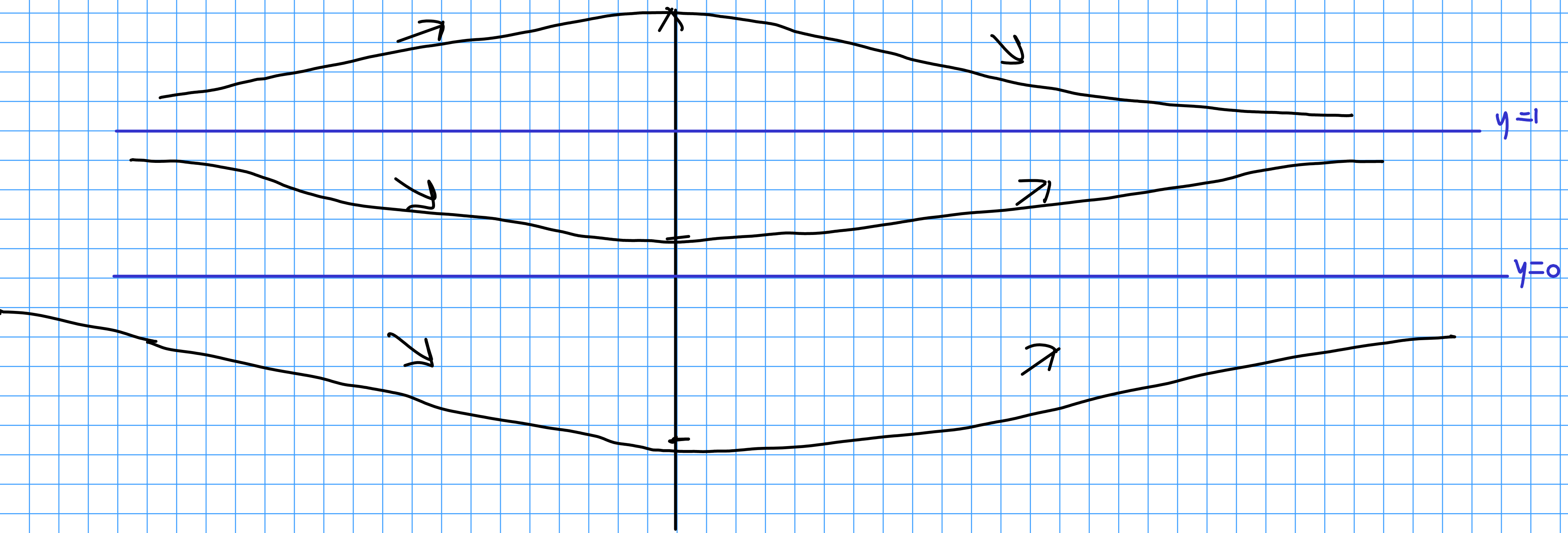
- DUE SOL. COSTANTI $y=0$ $y=1$

- $F(x,y) > 0 \iff 2xy^2(1-y) > 0 \iff y \neq 0 \quad x(1-y) > 0$

Vedi il disegno sotto $\nearrow = F > 0$

$\searrow = F < 0$

SE $x=0$ $F=0$ $\rightarrow$ $y'=0$



(DUBBIO : gli asintoti sono le sol costanti ?!)

SUGLI INTERVALLI DI ESISTENZA NON CI SONO DUBBI : le sol. ~~sol~~ sono definite su $]-\infty,+\infty[$ si vede dalla monotonia

- VEDIAMO SE C'È UN INT. PRIMO.

- Cerco un fattore integrante. DICO CHE $\lambda = \lambda(y)$ (MI FIDO!)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(y)\, 2xy^2(y-1)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(y)\,(1+x^2y^2)$$

$$\lambda'(y)\, 2xy^2(y-1) + \lambda(y)\, 2x\,(3y^2-2y) = \lambda(y)\, 2xy^2$$

$$\lambda'(y)\, 2xy^2(y-1) \underset{\Uparrow}{=} \lambda(y)\left(-4xy^2+4xy\right)$$

$$\lambda'(y)\, \cancel{2x}\, \cancel{y}^{2}\, \cancel{(y-1)} = \lambda(y)\, \cancel{4}^{2}\, \cancel{x}\, \cancel{y}\, \cancel{(1-y)}^{-1}$$

$$\lambda' = \frac{-2\lambda}{y} \iff \lambda(y) = \frac{c}{y^2}$$

- Cerchiamo ϕ potenziale per

$$\frac{2xy^2(y-1)}{y^2}\,\vec{i} + \frac{1+x^2 y^2}{y^2}\,\vec{j} =$$

$$2x(y-1)\,\vec{i} + \left(\frac{1}{y^2}+x^2\right)\vec{j}$$

(A) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2x(y-1)$ (B) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + \dfrac{1+x^2}{y^2}$

(A) $\Rightarrow$ $\phi = x^2(y-1) + c(y)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + c'(y)$

IMPONGO (B) $c'(y) = \dfrac{1}{y^2}$ $\Rightarrow$ $c(y) = -\dfrac{1}{y} + \text{cost.}$

IN DEFINITIVA $\quad \Phi(x,y) = x^2(y-1) - \frac{1}{y} \quad (+\text{cost.})$

• VEDIAMO COSA CI DICE Φ. Se y è soluzione

$\exists c: \quad x^2(y-1) - \frac{1}{y} = c \iff x^2 = \left(c + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y-1}$

VEDIAMO se riesco a disegnare il grafico di

$$g(y) = \frac{1}{y-1}\left(c + \frac{1}{y}\right)$$

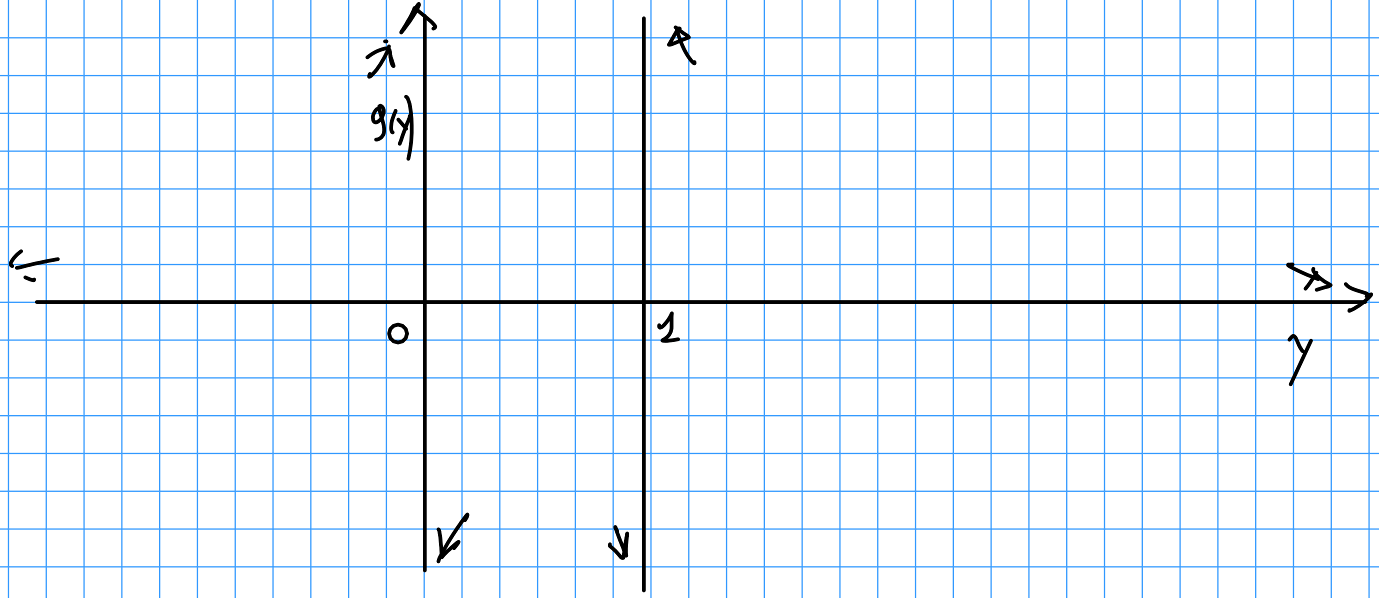
g è definita se $y \neq 1$ e $y \neq 0$

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0^+/0^-} g(y) = -\infty/+\infty \qquad \lim_{y\to 1^+/1^-} g(y) = \frac{c}{+\infty/-\infty}$$

(purché $c \neq 0$). Se $c = 0$ $\quad +\infty/-\infty$

METTIAMO CHE $\boxed{c \geq 0}$ (l'altro caso lo lascio ...)



$$g'(y) = -\frac{1}{(y-1)^2}\left(c+\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{y^3}\,\frac{1}{(y-1)} =$$

$$\left(\frac{1}{y-1}\right)\left(-\frac{c}{y-1} - \frac{1}{y^2(y-1)} - \frac{2}{y^3}\right) =$$

$$\frac{1}{(y-1)}\,\frac{-cy^3 - y - 2(y-1)}{y^3(y-1)}$$

NON SI STUDIA FACILMENTE !
(eq. di III° grado)

COMPLICATO → LASCIAMO PERDERE

→ VEDIAMO SE RIUSCIAMO A USARE Φ PER INDIVIDUARE GLI ASINTOTI

SO CHE $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \underline{y} \in \mathbb{R}$

$$\text{costante} = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x, y(x)) = \lim_{x \to -\infty} x^2 (y-1) - \frac{1}{y} =$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to \underline{y}}} x^2 (y-1) - \frac{1}{\underline{y}}$$

DICO CHE $\underline{y}$ PUÒ ESSERE <u>SOLO</u> $\underline{y} = 0 / \underline{y} = 1$

Se $\underline{y} \neq 0/1 \Rightarrow y - \underline{y} \to \underline{y} - 1 \neq 0$, $\frac{1}{y} \to \frac{1}{\underline{y}} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) \to +\infty(\underline{y} - 1) - \frac{1}{\underline{y}} = \begin{cases} +\infty & \underline{y} > 1 \\ -\infty & \underline{y} < 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

<u>DUNQUE</u> GLI ASINTOTI POSSONO ESSERE <u>SOLO</u>

$y = 0$ / $y = 1$!!