Analisi Matematica II
Lezione 63
17 maggio 2016

ESERCIZIO Calcolare un pot. $\boxed{\text{vettore}}$ per il campo

$$\vec{f}(x,y,z) = 2xye^{z}\,\vec{i} - y^2e^{z}\,\vec{j} + e^{xy}\,\vec{k}$$

QUESTO È POSSIBILE $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}2xye^{z} - \frac{\partial}{\partial y}y^2e^{z} + \frac{\partial}{\partial z}e^{xy} =$$

$$2ye^{z} - 2ye^{z} + 0 = 0$$

TORNA

CERCO $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ tale che $\vec{\nabla}\otimes\vec{F} = \vec{f}$; IMPONGO $F_3 = 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial z}F_1 = f_2 \qquad \frac{\partial}{\partial z}F_2 = -f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} = f_3$$

$$F_1(x,y,z) = \int -y^2 e^z \, dz = -y^2 e^z + c(x,y)$$

$$F_2(x,y,z) = -\int 2xy e^z \, dz = -2xy e^z + d(x,y)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \cancel{-2y e^z} + \frac{\partial}{\partial x} d(x,y) + \cancel{2y e^z} - \frac{\partial}{\partial y} c(xy) = e^{xy}$$

UN MODO POSSIBILE DI VERIFICARE LA 3^a CONDIZIONE:

$$c = 0 \qquad e \qquad d(x,y) = \int e^{xy} \, dx = \frac{e^{xy}}{y} + k(y)$$

$\Rightarrow$ POSSO PRENDERE

$$\vec{F}(x,y,z) = -y^2 e^z \, \vec{i} + \left(-2xy e^z + \frac{e^{xy}}{y} \right) \vec{j}$$

POSSO RIFARE L'ESERCIZIO IMPONENDO $F_1 = 0$

(INVECE DI $F_3 = 0$) $\Rightarrow$

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & 0 \\ j & D_y & F_2 \\ k & D_z & F_3 \end{bmatrix} = \vec{i}\left(D_y F_3 - D_z F_2\right) - \vec{j} \, D_x F_3 + \vec{k} \, D_x F_2$$

DUNQUE

$$D_x F_2 = f_3 \qquad D_x F_3 = -f_2 \qquad D_y F_3 - D_z F_2 = f_1$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \int e^{xy}\, dx \iff F_2 = \frac{e^{xy}}{y} + c(y,z)$$

$$F_3 = -\int -y^2 e^{z}\, dx \iff F_3 = + x y^2 e^{z} + d(y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 = + \cancel{2xy} e^{z} + \frac{\partial}{\partial y} d(y,z) - 0 - \frac{\partial}{\partial z} c(y,z) = \cancel{2xy} e^{z}$$

POSSO PRENDERE $c = d = 0$ TROVO

$$\vec{F}' = \frac{e^{xy}}{y} \vec{j} + x y^2 e^{z} \vec{k}$$

(ALTRO ROT. VETTORE)

VERIFICHIAMO CHE $\vec{F} - \vec{F}'$ è un gradiente!

$$\vec{F} - \vec{F}' = -y^2 e^{z} \vec{i} + \left(2xy e^{z} + \cancel{\frac{e^{xy}}{y}} \right) \vec{j} - \cancel{\frac{e^{xy}}{y}} \vec{j} - x y^2 e^{z} \vec{k}$$

$$- y^2 e^{z} \vec{i} - 2xy e^{z} \vec{j} - x y^2 e^{z} \vec{k} \overset{?}{\underset{!!}{=}} \nabla \phi$$

VEDIAMO SE SI TROVA ϕ ;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y^2 e^z \quad (A) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2xy e^z \quad (B) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -x y^2 e^z \quad (C)$$

$(C) \Rightarrow \quad \phi = -x y^2 e^z + c(x,y)$ Derivo in x e in y

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y^2 e^z + \frac{\partial}{\partial x} c(x,y) \; ; \; -2xy e^z + \frac{\partial c}{\partial y}(x,y)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y^2 e^z$ DUNQUE $\frac{\partial}{\partial x} c = 0$

$\Longleftrightarrow \; c(x,y) = c(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2xy e^z$ DUNQUE $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$

$c(x,y) =$ COSTANTE

IN DEFINITIVA $\quad \vec{F} - \vec{F}' = \nabla \phi \quad$ dove $\phi(x,y,z) = -xy^2 e^z + c$

<u>ESERCIZIO</u> CONSIDERIAMO L'EQ. DIFF.

$$y' = \frac{y}{x} \frac{e^{y/x}}{e^{y/x} - x} \quad \left(=: F(x,y) \right)$$

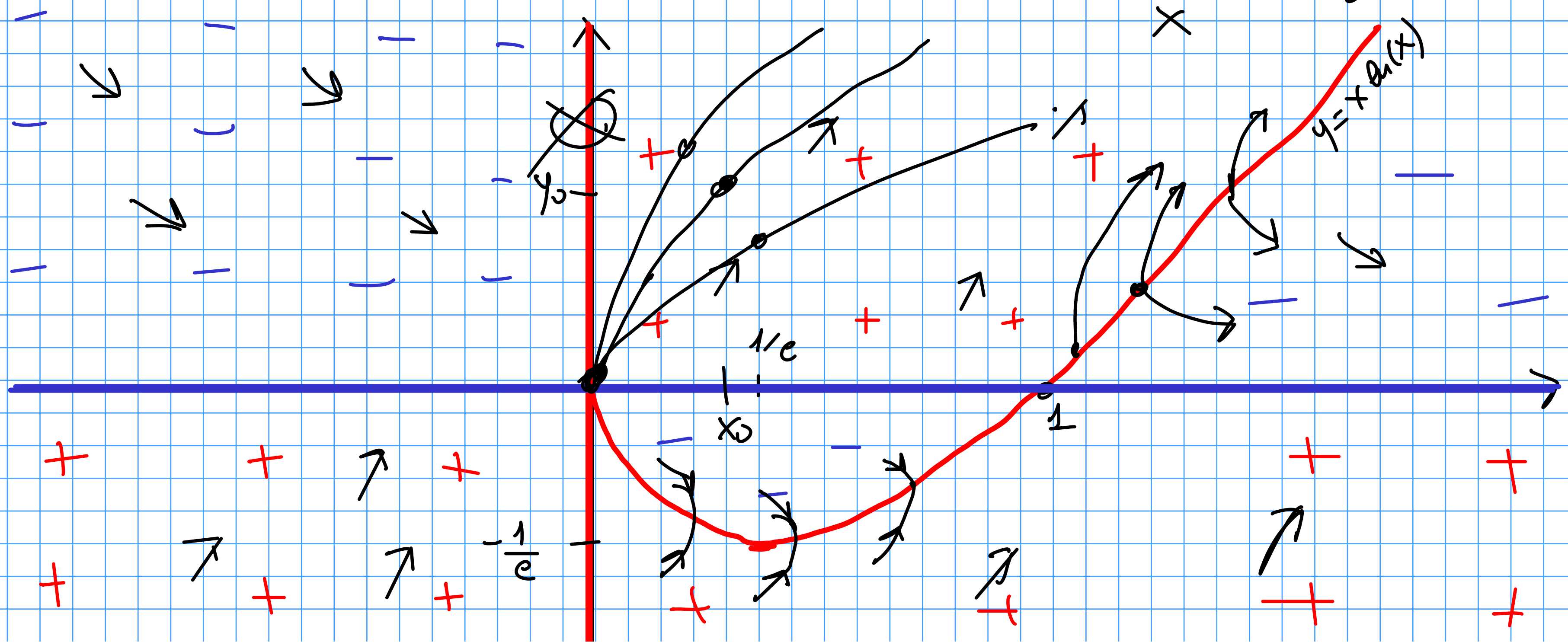
(2) PER QUALI (x_0, y_0) $\exists$ y soluzione con $y(x_0)=y_0$

R: $(x_0,y_0) \in$ DOMINIO$(F) = \{(x,y) : x \neq 0,\ x \neq e^{\frac{y}{x}}\}$

FUORI DA $\mathcal{D}(F)$ è F ho $\frac{\partial F}{\partial y}$ CONTINUA $\Rightarrow$

VALE IL T. DI ESIST. LOCALE DI CAUCHY (. . .)

$x \neq 0$ e $x \neq e^{\frac{y}{x}}$ → $x<0$ OPPURE → $x>0$ e $\ln x \neq \frac{y}{x} \Leftrightarrow y \neq x \ln x$



$y = x \ln x \qquad x > 0 \qquad$ se $x \to 0^+ \quad y \to 0^-$

se $x \to +\infty \quad y \to +\infty$

$y' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1 \qquad y' = 0 \iff x = \frac{1}{e} \to y = -\frac{1}{e}$

$D(f) = \{$ fuori dalla zona rossa $\}$

- CERCHIAMO COME VARIA IL SEGNO D)

$$F(x,y) = \frac{y}{x} \frac{e^{y/x}}{e^{y/x} - x} \qquad e^{y/x} > 0$$

$e^{y/x} - x \geq 0 \iff x \leq 0$ o $\begin{cases} x > 0 \text{ e} \\ y > x \ln x \end{cases}$

- $y(x) \equiv 0$ è sol. costante (L'UNICA SOL. COSTANTE)

- CERCO SE $\exists$ INTEGRALE PRIMO

- CERCO UN FATTORE INTEGRANTE cioè $\lambda(x,y)$ t.c.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x,y)\, y\, e^{y/x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,y)\, x\,(x - e^{y/x})\right)$$

CERCO $\lambda(x,y) = \lambda(x)$ (SUGGERIMENTO ESTERNO)

$$\lambda(x)\frac{\partial}{\partial y}\, y e^{y/x} = \lambda'(x)\, x\left(x - e^{y/x}\right) + \lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\, x\left(x - e^{y/x}\right)$$

$$\lambda(x)\left(e^{y/x} + \frac{y}{x} e^{y/x}\right) = \lambda'(x)\, x\left(x - e^{y/x}\right) +$$

$$\lambda(x)\left(x - e^{y/x} + x\left(1 + \frac{y}{x^2} e^{y/x}\right)\right) \iff$$

$$\lambda(x)\left[e^{y/x} \cancel{+ \frac{y}{x} e^{y/x}} - x + e^{y/x} - x \cancel{- \frac{y}{x} e^{y/x}}\right] = \lambda'(x)\, x\left(x - e^{y/x}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda(x)\left(2e^{y/x} - 2x\right) = \lambda'(x)\, x\left(x - e^{y/x}\right) \iff$$

$$-2\lambda(x) = \lambda'(x)\, x \qquad \lambda' = -\frac{2\lambda}{x} \iff \lambda = \frac{c}{x^2}$$

Per es. $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ $(c=1)$

DUNQUE IL CAMPO

$$\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \vec{i} + \frac{1}{x}\left(x - e^{y/x}\right) \vec{j}$$ è CONSERVATIVO

CERCHIAMONE UN POTENZIALE ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \phi = 1 - \frac{e^{y/x}}{x}$$

LA SECONDA COND. $\longrightarrow$ $\phi(x,y) = y - e^{y/x} + c(x)$

DA CUI $\frac{\partial}{\partial x} \phi(x,y) = \frac{y}{x^2} e^{y/x} + c'$ deve essere $\frac{y}{x^2} e^{y/x}$

DUNQUE $c =$ costante.

$$\Rightarrow \quad \phi(x,y) = y - e^{y/x} \; (+ \text{costante})$$

DUNQUE ϕ è UN INT. PRIMO, cioè

$\phi(x, y(x)) =$ costante se y risolve l'eq.

$\Rightarrow$ $\boxed{e^{\frac{y(x)}{x}} = y(x) + c}$ $\forall x$ per $c \in \mathbb{R}$

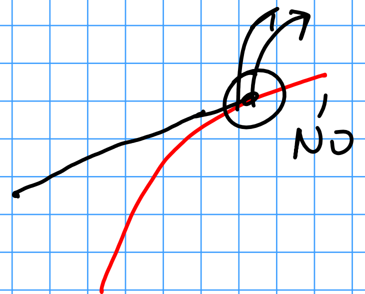
(se y è soluzione)

- Prendiamo $x_0 \in]0,1[$ e $y_0 > 0$

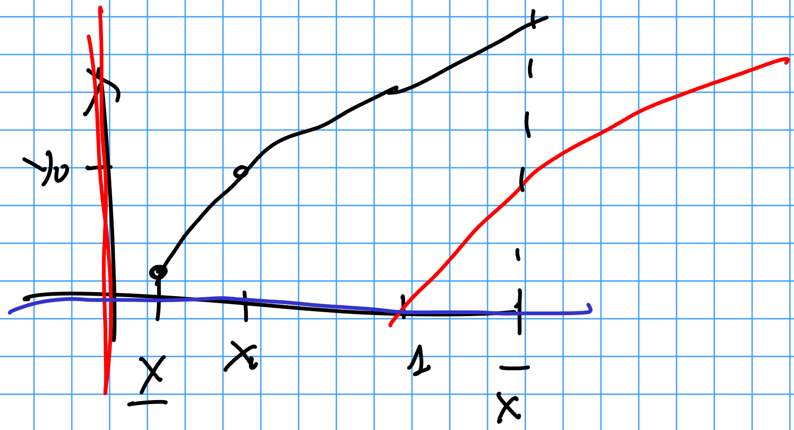
So che $\exists$ y soluzione che parte da (x_0, y_0)

$$\left(c = e^{\frac{y_0}{x_0}} - y_0 \right)$$

so che $y(x)$ è crescente fino a che $(x, y(x))$ rimane sopra la curva rossa ← QUESTO NON PUÒ ACCADERE PERCHÉ



$\Rightarrow$ $y(x)$ è sempre crescente $\underline{x} < x < \bar{x}$



$\boxed{1}$ $\underline{x}$ deve essere ZERO. Sicuramente $\underline{x} \geq 0$

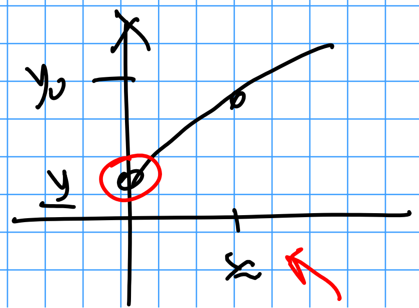
($F(x,y)$ NON $\exists$ a $x=0$)

NON PUÒ ESSERE $\underline{x} > 0$ SE NO

PUTREI RIPARTIRE (NON POSSO NEANCHE INCROCIARE $y=0$)

DUNQUE $(x, y(x)) \to (0, \underline{y})$ per $x \to 0^+$

CON $\underline{y} \geq 0$



POTREBBE ESSERE $\underline{y} > 0$) (con $y' \to +\infty$)

Se $\lim_{x \to 0^+} y(x) = \underline{y} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to \infty} F(x, y(x)) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} = \lim_{x \to 0^+} y'(x) = +\infty$$

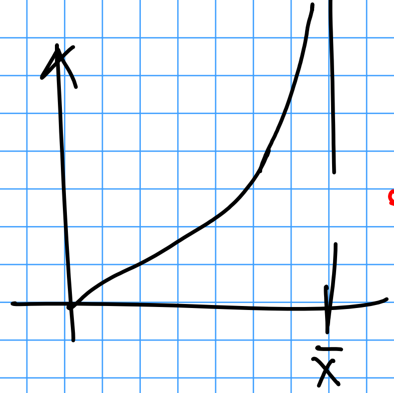
$$\Rightarrow \Phi(x, y(x)) = e^{\frac{y(x)}{x}} - y(x) \to +\infty$$

$$\downarrow \underline{y}$$

IMPOSSIBILE PERCHÉ $\phi(x, y(x)) =$ costante

$$\Longrightarrow \underline{y} = 0 \qquad (x, y(x)) \xrightarrow{x \to \infty} (0, 0)$$

- Se fosse $\bar{x} < +\infty \Rightarrow y(x) \to +\infty$ per $x \to \bar{x}$



DOMANI

(IMPOSSIBILE)