Analisi Matematica II
Lezione 60
10 maggio 2016

Teorema (di Stokes)

S superficie in $\mathbb{R}^3$ descritta in modo che la normale e il bordo abbiano direzione coerente tra loro

(IN PARTICOLARE S ha una normale in ogni punto, che varia con continuità). Sia γ una curva che descrive il bordo

ALLORA dato un campo $\vec{f}$ definito su S, di classe C^1 SI HA

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\text{rot}}\, f \cdot \vec{\nu}\right) d\sigma = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

ESEMPIO S = (emisfero nord della sfera) =

$$\{x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$$

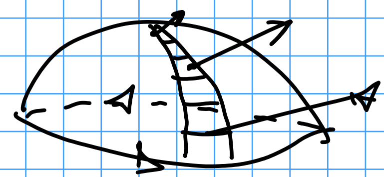
S la posso descrivere mediante la parametrizzazione

$$\Gamma(\psi,\theta) = \cos\theta \sin\psi \,\vec{i} + \sin\theta \sin\psi \,\vec{j} + \cos\psi \,\vec{k}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$$

con questa parametrizzazione $\vec{N}(\psi,\theta) = \sin\psi \; \Gamma(\psi,\theta)$

$(\quad \|\vec{N}\| = \sin(\psi) \quad ; \quad \|\Gamma\| = 1 \quad)$



IL BORDO è descritto da

$$\gamma(\theta) = \Gamma\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

PRENDIAMO

$$\vec{f}(x,y,z) = (z-y)\,\vec{i} + x(1+z^2)\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

e proviamo a verificare che vale Stokes.

(I) Calcolo $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} =$

$$\int_0^{2\pi} \vec{g}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\cdot(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k})\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\, k\right)\cdot\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = 2\pi$$

(II) Calcolo $\operatorname{rot}(\vec{g}) =$

$$\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & z-y \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x(1+z^2) \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & xy \end{bmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}xy - \frac{\partial}{\partial z}x(1+z^2)\right) + -\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial z}(z-y)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}x(1+z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(z-y)\right) =$$

$$(x - 2xz)\vec{i} + (-y+1)\vec{j} + (1+z^2+1)\vec{k} =$$

$$x(1-2z)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (2+z^2)\vec{k}$$ ← (vedi alla fine)

(III) Proviamo a calcolare $\iint_S \left(\overrightarrow{\operatorname{rot} g}\cdot\vec{\nu}\right)d\sigma =$

$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \overrightarrow{\operatorname{rot} f}\,(\cos\theta\sin\psi,\ \sin\theta\sin\psi,\ \cos\psi)\cdot\vec N(\psi,\theta)\ d\theta\, d\psi =$$

$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \Big(\cos\theta\sin\psi\,(1-2\cos\psi)\,\vec i + (1-\sin\theta\sin\psi)\,\vec j +$$

$$(2+\cos^2\psi)\,\vec k\Big)\cdot\left(\cos\theta\sin\psi\,\vec i+\sin\theta\sin\psi\,\vec j+\cos\psi\,\vec k\right)\sin\psi\ d\theta\, d\psi$$

$$=\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \sin\psi\Big\{\cos^2\theta\sin^2\psi\,(1-2\cos\psi)+\sin\theta\sin\psi\,(1-\sin\theta\sin\psi)$$

$$+\cos\psi\,(2+\cos^2\psi)\Big\}\,d\theta\, d\psi$$

$$=\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \sin\psi\Big\{\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\psi}_{1} - 2\cos^2\theta\,\underset{3}{}\cos\psi\sin^2\psi + \underbrace{\sin\theta\sin\psi}_{2} -$$

$$\underbrace{\sin^2\theta\sin^2\psi}_{1} + \underbrace{2\cos\psi + \cos^3\psi}_{4}\Big\}\,d\theta\, d\psi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\psi\, d\psi + \int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\, d\psi\ +$$

$$-2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\sin^3\psi + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\psi+\cos^3\psi)\sin\psi\, d\psi =$$

$\sin\psi = t \quad \cos\psi\, d\psi = dt \qquad t=\cos\psi \quad -\sin\psi\, d\psi = dt$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\, d\theta}_{=0} \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta}_{=0} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi +$$

$$-2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \int_0^1 t^3\, dt + 2\pi \int_1^0 (2t+t^3)(-dt) =$$

$$-2\pi \cancel{\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1} + 2\pi \left[t^2 + \cancel{\frac{t^4}{4}}\right]_0^1 = 2\pi\left(1^2 - 0\right) = 2\pi$$

TORNA

Def. Dico che $\vec{F}$ è un potenziale vettore per $\vec{f}$ se

$$\text{rot}\, \vec{F} = \vec{f}$$

OSS. Se $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\Longrightarrow$

$$\text{div}(\vec{f}) = 0$$

INFATTI SI HA SEMPRE $\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0$

$\forall$ comp $\vec{F}$ di classe C^2

FACCIAMO LA VERIFICA:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) =$$

$$\operatorname{div}\left\{ \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_1 \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_2 \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_3 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\operatorname{div}\left\{ \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \right\} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial y}}_{A} - \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial z}}_{-B}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial z}}_{C} - \underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial x}}_{-A}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x}}_{B} - \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y}}_{-C}\Big) = 0$$

USO IL TEOREMA DI SCHWARTZ

<u>OSS</u> se dico (formalmente) usando "e' algebra"

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{F})$$

$$= \vec{F} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}}_{=0})$$

<u>DEF.</u> Se $\operatorname{div}(\vec{\rho}) = 0$ dico che $\vec{\rho}$ è <u>SOLENOIDALE</u>

DUNQUE Se $\vec{f}$ ha un potenziale vettore $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è solenoidale

(corrisponde a $\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ f irrotazionale)

IL VICEVERSA NON VALE SEMPRE

(È POSSIBILE TROVARE DEI CONTROESEMPI: si trova un campo $\vec{f}$ definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ con $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ ma $\vec{f}$ NON HA POT. vettore (RIMANDIAMO A DOPO L'ESEMPIO)

OSS. Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ HA POT. VETTORE (IN Ω)

$\Rightarrow$ $\forall$ S superficie con bordo vuoto "..."

di Ω $\Rightarrow$ $\Phi(\vec{f}, S) = 0$ (flusso)

INFATTI PER IL T. di STOKES

$$\Phi(\vec{f}, S) = \Phi(\operatorname{rot} \vec{F}, S) \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\text{BORDO di } S = \phi} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

(dire S non ha bordo significa che S è "chiuso")

(È UN ENUNCIATO "PARALLELO" A: se $\vec{f} = \nabla F \Rightarrow$
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot ds = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiuso} \;)$$

[SI PUÒ DIM. CHE QUESTA SCRITTA SOPRA È UNA CARATTERIZZAZIONE: $\vec{f}$ definita su $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{f}$ AMMETTE POT. VETTORE $\Longleftrightarrow$ $\Phi(f, S) = 0$ per ogni S senza bordo $S \subseteq \Omega$.]

(NO DIM.)

<u>CONTROESEMPIO</u> (GIÀ VISTO)

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \left(\|\vec{f}\| = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

SI VEDE CHE $\text{DIV}(\vec{f}) = 0$ MA

$$\Phi(f, S_R) = \underset{\neq 0}{4\pi} \quad \text{se} \quad S_R = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

TEOR. Se Ω è stellato rispetto a un suo punto e se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è solenoidale ($\operatorname{div} \vec{f} = 0$)

$\Rightarrow \exists$ un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$

COME TROVARE UN POT. VETTORE per un campo $\vec{f}$?!

DEVO TROVARE $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

CON LA PROPRIETÀ: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$ cioè

$$f_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad f_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1$$

IMPONGO $F_3 = 0$ (vediamo se riesco a trovare $\vec{F}$ con $F_3 = 0$)

$$f_1 = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial z} F_1, \quad f_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

DUNQUE $F_2 = -\int f_1(x,y,z)\,dz$, $F_1 = \int f_2(x,y,z)\,dz$ ←

IN QUESTO MODO TROVO F_1 e F_2 a meno di funzioni di (x, y) $\Rightarrow$ IMPONGO LA TERZA CONDIZIONE E VEDO ...

VEDIAMO CHE COSA RIESCE CON UN ESEMPIO

ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y,z) = x(1-2z)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (2+z^2)\vec{k}$$

e proviamo a trovare un pot. vettore $\vec{F}$ nel modo scritto sopra.

OSS. Verifichiamo prima che $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ (SE NO $\nexists$ $\vec{F}$)

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = (1-2z) + (-1) + 2z = 0 \quad \text{TORNA.}$$

DUNQUE METTIAMO $F_3 = 0$ e cerchiamo di risolvere

$$F_1 = \int (1-y)\, dz \qquad F_2 = -\int x(1-2z)\, dz$$

$$F_1(x,y,z) = (1-y)z + c(x,y) \qquad F_2 = -xz + xz^2 + d(x,y)$$

IMPONGO LA TERZA CONDIZIONE

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = f_3 = 2 + z^2 \quad ;$$

$$-\cancel{z} + \cancel{z^2} + \frac{\partial}{\partial x} d(x,y) - (-\cancel{z}) - \frac{\partial}{\partial y} c(x,y) = 2 + \cancel{z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} d - \frac{\partial}{\partial y} c = 2 \quad \Leftarrow \text{(per esempio)} \quad c = 0 \quad d(x,y) = 2x$$

HA TANTE SOLUZIONI

DUNQUE TROVO (UN POT. VETTORE)

$$\vec{F}(x,y,z) = (1-y)z\,\vec{i} + x\left[z(z-1) + 2\right]\vec{j}$$

<u>OSSERVAZIONE</u> $\vec{F}$ NON È UNICO !!

$\vec{f}$ era già stato visto prima (all'inizio) e

$$\vec{f} = \text{rot}\left(\underbrace{(z-y)\vec{i} + x(1+z^2)\vec{j} + xy\,\vec{k}}_{\vec{F}_1}\right)$$

SE C'È UN POT. VETTORE CE NE SONO MOLTI

COME SONO LEGATI TRA LORO ??

$$\mathrm{rot}(\vec{F_1}) = \mathrm{rot}(\vec{F_2}) \iff \mathrm{rot}(\vec{F_1} - \vec{F_2}) = 0$$

$\vec{f}$

COME SONO FATTI I CAMPI $\vec{F}$ con $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$!?

- SICURAMENTE $\vec{F} = \nabla \phi$ HA ROTORE NULLO.

SE Ω È STELLATO VALE "$\iff$"

DUNQUE SE Ω è stellato e $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ sono pot. vettori di $\vec{f}$ $\iff$ $F_1 - F_2$ è conservativo

cioè $\vec{F_1} = \vec{F_2} + \nabla \phi$ per un opportuno ϕ

<u>TEOREMA</u> Data $\vec{f}$ generica si può scrivere

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$ dove $rot(f_1) = 0$

$div(f_2) = 0$

f_1 IRROTAZ. f_2 SOLENOID.

e se siamo su Ω stellato

$$\vec{f} = \nabla \phi + rot\, F_2$$

(NON IN MODO UNIVOCO) (NO DIM.)