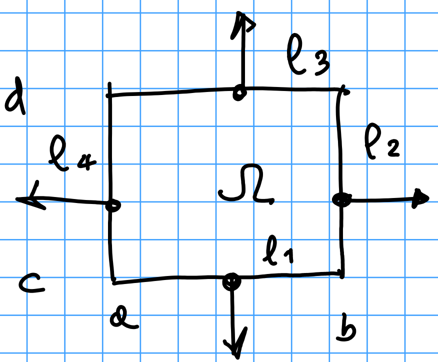
Analisi Matematica II
Lezione 59
9 maggio 2016

TEOREMA DELLA DIV. — DIM. NEL CASO DI Ω RETTANGOLO

Se $\Omega = \,]a,b[\, \times \,]c,d[\, \subset \mathbb{R}^2$ e se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ è C^1

allora $\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j}$ e $\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2$.

Allora



$$\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f_1 \, dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y)\, dx =$$

$$\int_c^d \left(f_1(b,y) - f_1(a,y) \right) dy =$$

$$\int_c^d \vec{f}(b,y) \cdot \vec{\nu}\, dy + \int_c^d \vec{f}(a,b) \cdot \vec{\nu}\, dy = \int_{\ell_4} \left(\vec{f} \cdot \vec{\nu} \right) ds + \int_{\ell_2} \left(\vec{f} \cdot \vec{\nu} \right) ds$$

Analogamente si vede che

$$\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial y} f_2 \, dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} f_2 \, dy = \int_a^b \big(f_2(x,d) - f_2(x,c) \big) dx =$$

$$\int_a^b \left(\vec{f}(x,d)\cdot\vec{v} + f(x,c)\cdot\vec{v} \right) dx = \int_{\ell_2} \vec{f}\cdot\vec{v}\, ds + \int_{\ell_4} \vec{f}\cdot\vec{v}\, ds$$

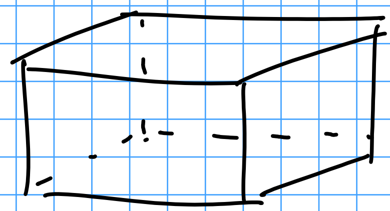
SOMMANDO

$$\iint_\Omega \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \left(\vec{f}\cdot\vec{v} \right) ds$$

NOTA LO STESSO DISCORSO SI PUÒ FARE IN $\mathbb{R}^3$

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz =$$

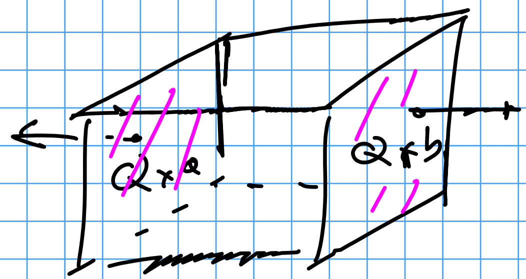
$$\iint_{\partial\Omega} \left(\vec{f}\cdot\vec{v} \right) d\sigma \quad ; \quad \text{PER ESEMPIO}$$



$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \int_c^d\int_e^f dy\,dz \int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx =$$

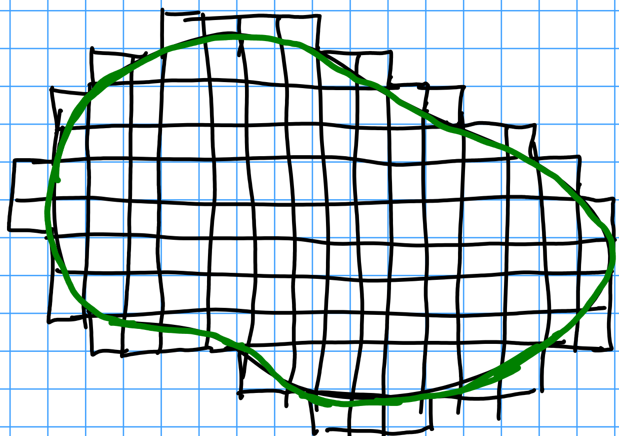
$$\int_c^d\int_e^f \Big(f_1(b,x,y) - f_1(a,x,y)\Big)\,dy\,dz =$$

$$\iint_{Q_{x,b}} \Big(\vec f \cdot \underset{=\vec i}{\vec \nu}\Big)\,dy\,dz + \iint_{Q_{x,a}} \Big(\vec f \cdot \underset{=-\vec i}{\vec \nu}\Big)\,dy\,dz$$



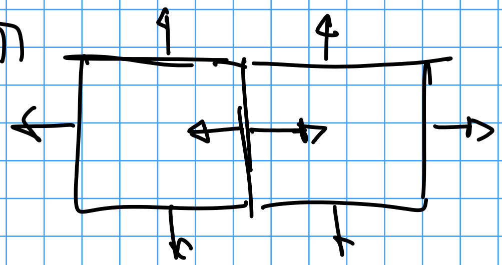
IDEA DI DIM. DEL CASO GENERALE

DATO Ω LO APPROSSIMO CON UN UNIONE DI RETTANGOLI



E NOTO CHE I FLUSSI RELATIVI AI RETTANGOLI INTERNI

NON DANNO CONTRIBUTO DATO CHE
I FLUSSI SU FACCE CONFINANTI
SI ANNULLANO TRA LORO
A CAUSA DELLE NORMALI
OPPOSTE



TEOREMA DI GAUSS GREEN

Se f e g sono C^2 allora

$$\iiint_{\Omega} f \, \Delta g \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} f(\nabla g \cdot \vec{\nu}) \, d\sigma - \iiint_{\Omega} \nabla f \, \nabla g \, dx\,dy\,dz$$

DIM. Applico il teor. della div. e $\vec{h} = f \cdot \nabla g \Rightarrow$

$$\mathrm{div}(\vec{h}) = \nabla f \, \nabla g + f \, \Delta g$$

(ricordiamo che $\Delta g = \operatorname{div}(\nabla g) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} g + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g$)

<u>OSS.</u> Supponiamo che f, g siano C^2 e che una delle due: valga

(A) $f = g = 0$ su $\partial \Omega$

(B) $\nabla f \cdot \vec{\nu} = \nabla g \cdot \vec{\nu} = 0$ su $\partial \Omega$

ALLORA

$$\iiint_\Omega f \Delta g = -\iiint \nabla f \nabla g = \iiint g \nabla f$$

(i termini di superficie sono NULLI)

<u>CONSEGUENZA</u> Siano h dato e u, v soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u = h & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v = h & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ALLORA $u = v$ (<u>UNICITÀ</u> della soluzione di $\Delta u = h$ con $u=0$ su $\partial\Omega$)

INFATTI posto $w = v - u$ si ha

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

usando Gauss-Green con $f = g = w$

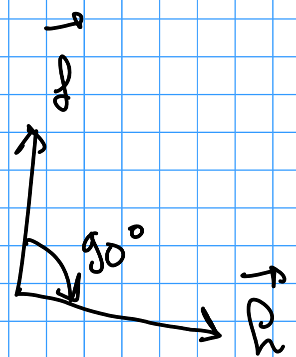
$$0 = \iiint w\,\Delta w = -\iiint |\nabla w|^2 \Rightarrow w = \text{costante}$$

dato che $w = 0$ su $\partial\Omega \Rightarrow w \equiv 0$.

TORNIAMO AL CASO BIDIMENSIONALE

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (\vec{f}\cdot\vec{\nu})\,d\sigma$$

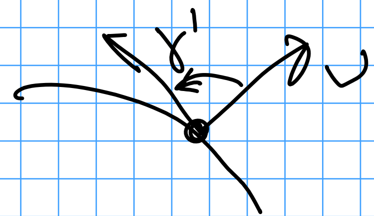
e usiamo $\vec{h} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\,\vec{i} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\,\vec{j}$



Si capisce che $\vec{h}$ si ottiene da $\vec{f}$ ruotando di $90°$ in senso orario (cioè ruotando di $-90°$)

Se γ percorre $\partial\Omega$ coerentemente con Ω si ha che

γ' è concorde con il ruotato di $\vec{\nu}$ di $+90°$



e allora

$$\vec{h}\cdot\vec{\nu} = \vec{f}\cdot\gamma' \qquad \text{dunque}$$

$$\iint\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

$$\parallel$$

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}(\vec{f})\cdot\vec{K}\,dx\,dy$$

QUESTO RISULTATO SI PUÒ GENERALIZZARE A UNA SUPERFICIE S in $\mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un caso particolare)

TEOREMA DI STOKES

Se S è una superficie di $\mathbb{R}^3$ avente bordo descritto da una curva γ in modo che il verso di γ sia coerente con la normale a S $\Longrightarrow$

$$\iint_S \operatorname{rot}(f) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

per ogni $\vec{f}$ di classe C^1 definita su S.