Analisi Matematica II
Lezione 57
3 maggio 2016

<u>Esempio</u> (di nuovo la sfera)

Posso parametrizzare la sfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$

mediante

$$\Gamma(\vartheta,\psi) = \cos(\theta)\sin(\psi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\psi)\vec{j} + \cos(\psi)\vec{k}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \psi \leq \pi$$

(è O.K. tranne che in $\theta = 2\pi$, $\psi = 0$ $\psi = \pi$ è NON INIETTIVA)

Devo calcolare $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta}$ $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \psi}$ $\Longrightarrow$

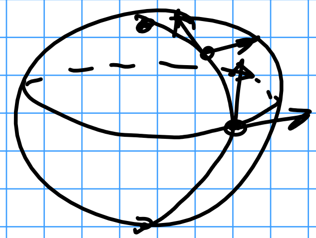
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = -\sin(\theta)\sin(\psi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\psi)\vec{j}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = \cos(\theta)\cos(\psi)\,\vec{i} + \sin(\theta)\cos(\psi)\,\vec{j} - \sin(\psi)\,\vec{k}$$

($\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi}$ generano il piano tangente ;

$\{\theta = \text{costante}\} \rightarrow$ MERIDIANI

$\{\psi = \text{cost.}\} \rightarrow$ PARALLELO



$$\vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} \overset{(\sim)}{=} \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} i & -\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \\ j & \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi \\ k & 0 & -\sin(\psi) \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \quad & \uparrow & \uparrow \\ & \frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma & \frac{\partial}{\partial\psi}\Gamma \end{array} \end{array} =$$

$$\vec{i}\left(-\cos\theta\sin^2\psi\right) - \vec{j}\left(\sin\theta\sin^2\psi\right)$$

$$+\vec{k}\left(\underbrace{-\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi - \cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}_{-\sin\psi\cos\psi}\right)$$

$$\|\vec{N}\|^2 = \underbrace{\cos^2\theta\sin^4\psi + \sin^2\theta\sin^4\psi}_{\sin^4\psi} + \sin^2\psi\cos^2\psi =$$

$$\sin^4\psi + \sin^2\psi\cos^2\psi = \sin^2\psi$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{N}\| = \sin\psi \qquad (>0)$$

Se voglio calcolare l'area della sfera $\Longrightarrow$

$$A(S) = \iint_{\substack{0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \pi}} 1 \cdot \sin\psi \, d\theta \, d\psi =$$

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\psi = 2\pi \Big[-\cos\psi\Big]_0^{\pi} = 2\pi(1+1) = 4\pi$$

<u>OSS</u> Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; f differenziabile

$\Rightarrow$ <u>grafico di f</u> è una superficie parametrica ;

$$\Gamma(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big) \qquad (u,v) \in \Omega$$

INFATTI $\quad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\vec{k} \qquad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \det \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \vec{k} \cdot 1 = -\frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\vec{j} + \vec{k} \neq 0$$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \qquad (\geq 1)$$

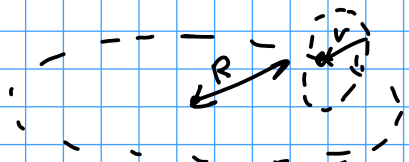
POSSO DIRE CHE IL GRAFICO DI f È UNA "SUPERFICIE CARTESIANA"

Per esempio l'emisfero nord della sfera è grafico di

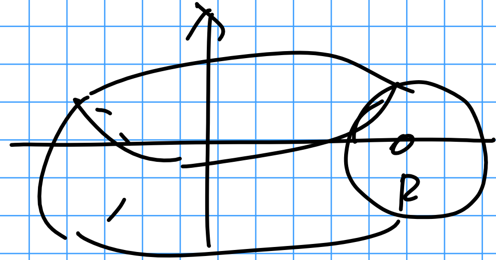
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ su $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ (VISTO IERI!)

<u>ALTRO ESEMPIO</u> : Area del <u>TORO</u>

Prendo $R > r > 0$



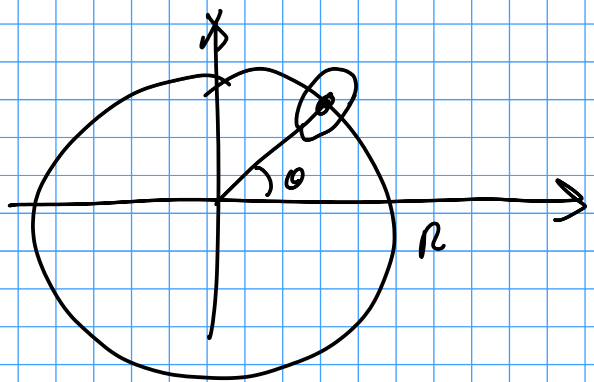
T = Toro ottenuto ruotando la circonferenza di centro $(R, 0)$ e raggio r



Posso parametrizzare T $(= T(R, r))$ con due angoli θ, ψ

entrambi da 0 e 2π

$$\Gamma(\theta, \psi) = R(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta) + r(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta)\cos\psi + r\sin\psi\,\vec{k}$$



$$\Gamma(\theta, \psi) = (R + r\cos\psi)(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta) + r\sin\psi\,\vec{k}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = (R + r\cos\psi)(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\psi} = -r\sin(\psi)(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta) + r\cos\psi\,\vec{k}$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = \det \begin{bmatrix} i & -\sin\theta & -\sin\psi \cos\theta \\ j & \cos\theta & -\sin\psi \sin\theta \\ k & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} (R + r\cos\psi)\, r$$

$$= \left[\vec{i}\,(\cos\theta \cos\psi) - \vec{j}\,(-\sin\theta \cos\psi) + \vec{k}\,(\underbrace{\sin^2\theta \sin\psi + \cos^2\theta \sin\psi}_{\sin\psi}) \right] r(R + r\cos\psi) =$$

$$\|\vec{N}\|^2 = (\cos^2\theta \cos^2\psi + \sin^2\theta \cos^2\psi + \sin^2\psi)\, r^2 (R + r\cos\psi)^2$$

$$= (\cos^2\psi + \sin^2\psi)\, r^2 (R + r\cos\psi)^2 = r^2 (\underbrace{R + r\cos\psi}_{>0})^2$$

$$\|\vec{N}\| = r(R + r\cos\psi)$$

$$\Rightarrow \quad A(T) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \; r(R + r\cos\psi) = 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos\psi)\, d\psi =$$

$$2\pi r \left(2\pi R + r \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi}_{=0} \right) = \boxed{2\pi r \; 2\pi R}$$

FLUSSO DI UN CAMPO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

CASO S SUPERFICIE PARAMETRICA

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad T : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial u} \otimes \frac{\partial T}{\partial v} \neq 0$

e $\vec{f} : W \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ con $W \subset \mathbb{R}^3$ e tale che

$T(\Omega) \subset W$

($\vec{f}(x,y,z)$ è definita nei punti $(x,y,z) \in S$.)

DEFINISCO IL FLUSSO DI $\vec{f}$ attraverso S

$$\Phi(f, S) = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \stackrel{def}{=}$$

$$\iint_\Omega \vec{f}(T(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial T}{\partial v}(u,v) \right) du \, dv$$

TEOREMA Supponiamo che $\phi : \Omega_1 \to \Omega$, ϕ bigettiva

dove $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$, ϕ diff. e $\boxed{\det J_\phi > 0}$

Considero la "riparametrizzazione" $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$

Allora

$$\iint_{\Gamma} (\vec{g} \cdot \vec{\nu})\, d\sigma = \iint_{\Gamma_1} (\vec{g} \cdot \vec{\nu}_1)\, d\sigma$$

Se invece $\det J_\phi < 0 \Rightarrow \displaystyle\iint_{\Gamma} (\vec{g} \cdot \vec{\nu})\, d\sigma = -\int_{\Gamma_1} (\vec{g} \cdot \vec{\nu}_1)\, d\sigma$

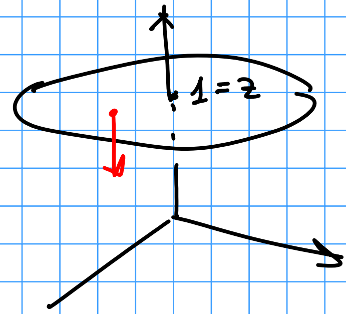
(NO DIM.)

CAMBIANDO IL VERSO DELLA NORMALE $\Rightarrow$ IL FLUSSO CAMBIA SEGNO

ESEMPIO

$$\vec{g}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$S = \{x^2+y^2 \le 1 \,,\ z = 1\}$



S è (banalmente) una sup cartesiana

$\Gamma(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \vec{k}$ $\qquad (u,v) \in B = \{u^2+v^2 \le 1\}$

OPPURE S è descritta da

$\Gamma_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}$ $\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\ 0 \le \rho \le 1$

USIAMO Γ_1!!

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} = \det\begin{bmatrix} i & -\sin\theta & \cos\theta \\ j & \cos\theta & \sin\theta \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}\rho =$$

$-\rho\,\vec{k}$

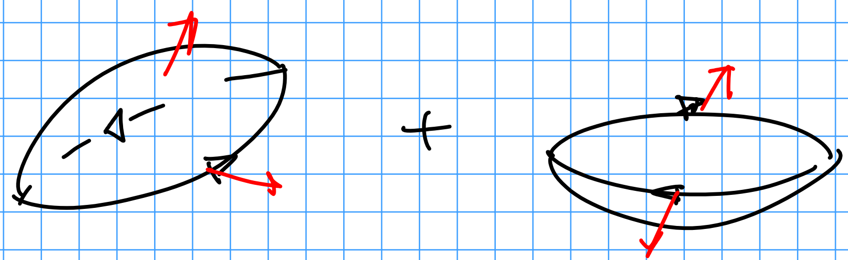
$$\Phi(\vec{f}, S) = \iint_{\substack{0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1}} \frac{\rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}}{(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + 1)^{3/2}} \cdot -\rho\,\vec{k} =$$

$$2\pi \int_0^1 \frac{-\rho\, d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}} = -\pi \int_0^1 \frac{ds}{(1+s)^{3/2}} = -\pi \left[(-2)(1+s)^{-1/2}\right]_0^1$$

$s = \rho^2$
$ds = 2\rho\, d\rho$

$$= -\pi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + 2\right) = -2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$$

SE S è una superficie generica ottenuta incollando superfici parametriche ~~lungo~~ lungo i bordi IN MODO COERENTE CON I BORDI



(⇒ LE NORMALI VANNO D'ACCORDO)

POSSO DEFINIRE IL FLUSSO COME SOMMA DEI FLUSSI SULLE VARIE "TOPPE"

OSS. (IMPORTANTE): Se $W \subset \mathbb{R}$ è un dominio regolare

($W = \{G(x,y,z) \leq 0\}$ e $\nabla G(x,y,z) \neq 0$ nei punti di

$\partial W = \{G(x,y,z) = 0\}$)

$\Rightarrow$ ∂W è una superficie (non parametrica)

(IDEA: USANDO IL DINI POSSO VEDERE ∂W come unione di superfici cartesiane)

La normale a ∂W si può scegliere in modo che sia concorde con $\nabla G(x,y,z)$ NORMALE ESTERNA

ORIENTAMENTO STANDARD

NOTA ∂W è una superficie senza bordo

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Se W è un dominio regolare, $\vec{f} : W \to \mathbb{R}^3$
$W \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{f}$ differenziabile

FLUSSO DI $\vec{f}$ attraverso ∂W = ($\vec{\nu}$ va scelto in modo uscente da W)

$$\iint_{\partial W} (\vec{f}, \vec{\nu})\, d\sigma$$

$$= \iiint_W \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right)}_{\operatorname{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}} dx\,dy\,dz$$

PER ESEMPIO

$$\vec{f}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$W = B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$\Phi(\vec{f}, \partial W)$$

(a) Usiamo la def. di flusso.

$\partial W =$ sfera . posso parametrizzo come prima

$$\Gamma(\theta,\psi) = \cos\theta \sin\psi \,\vec{i} + \sin\theta \sin\psi \,\vec{j} + \cos\psi \,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \nu(\theta,\psi) = -\cos\theta \sin^2\psi \,\vec{i} - \sin\theta \sin^2\psi \,\vec{j} - \sin\psi \cos\psi \,\vec{k} =$$

$$-\sin\psi \,\Gamma(\theta,\psi)$$ ENTRANTE :(

SCAMBIO θ e ψ : $\rightsquigarrow$ $\nu(\psi,\theta) = \sin\psi \,\Gamma(\theta,\psi)$

$$\phi(\vec{\rho}, \partial B) = \iint_{\substack{0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \pi}} \vec{\rho}\,(\Gamma(\psi,\theta)) \cdot \sin\psi \,\Gamma(\psi,\theta)\, d\theta\, d\psi =$$

$$\iint \frac{\Gamma(\psi,\theta)}{1^3} \cdot \sin\psi \,\Gamma(\psi,\theta)\, d\theta\, d\psi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\psi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\psi = 4\pi$$

- VEDIAMO SE TORNA CON IL TEOR. DELLA DIV.

$$\operatorname{div}\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\, 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(x^2+y^2+z^2 - 3x^2 \right) = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = 0$$

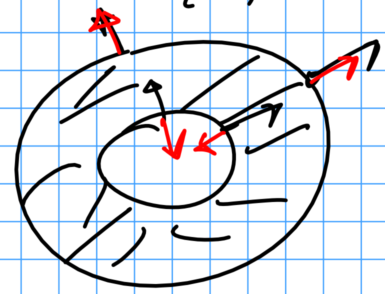
NON TORNA ??

IL PROBLEMA È CHE $\vec{f}$ NON È DIFF IN TUTTO $B = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

$\vec{f}$ NON È DEFINITO IN $(0,0,0)$!!!

QUESTO CALCOLO MOSTRA PERALTRO CHE

$$W = \{ \quad R_1 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2 \}$$



(RUSTATA)

$\partial W =$ UNIONE DELLE DUE SFERE DI RAGGI $R_1 < R_2$

$$\Phi(\vec{f}, W) = \Phi(\vec{f}, S(R_2)) - \Phi(\vec{f}, S(R_1))$$

$$\parallel$$

$$\iiint_W \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\, dy\, dz = 0$$

NORMALI CONCORDI CON LA POSIZIONE - CIOE' NORMALI CHE PUNTANO VERSO L'ESTERNO

DUNQUE $\forall R$

$$\Phi(\vec{f}, B(0,R)) = 4\pi$$

(NON DIPENDE DA R)