Analisi Matematica II
Lezione 56
2 maggio 2016

SUPERFICIE – INTEGRALI DI SUPERFICIE $\boxed{\text{IN } \mathbb{R}^3}$

Def. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e una funzione

$T : \Omega \to \mathbb{R}^3$ INIETTIVA con T differenziabile e

$\frac{\partial T}{\partial u}$ e $\frac{\partial T}{\partial v}$ siano $\neq 0$ e linearmente indip. $\forall (u,v) \in \Omega$

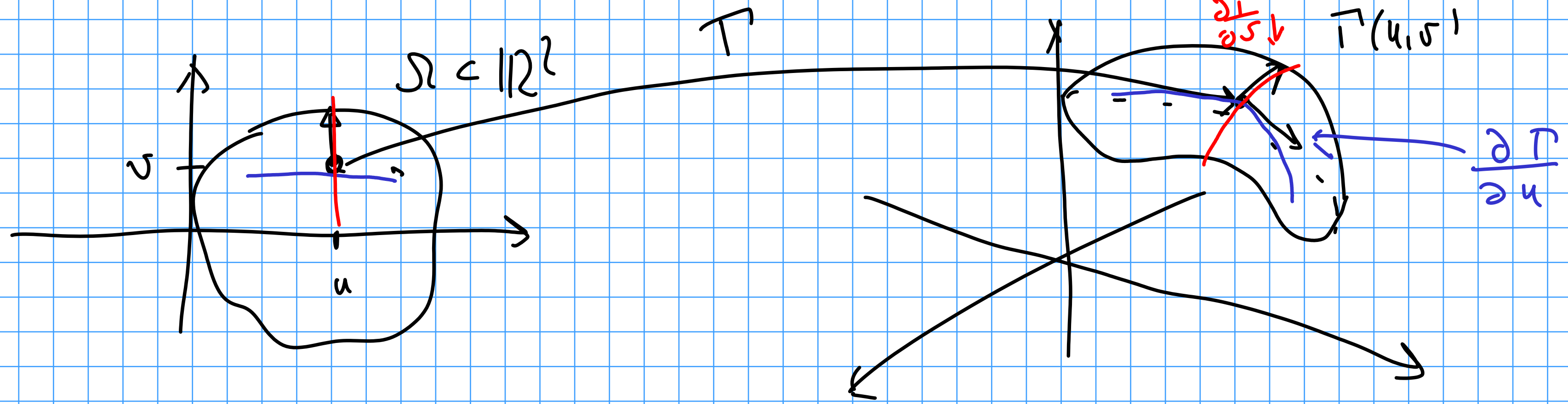
Dico che T descrive una superficie parametrica regolare

e chiamo $T(\Omega)$ il supporto della superficie

Dico che il sottospazio bidimensionale in $\mathbb{R}^3$

generato da $\frac{\partial T}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial T}{\partial v}(u_0,v_0)$ è il "PIANO TANGENTE"

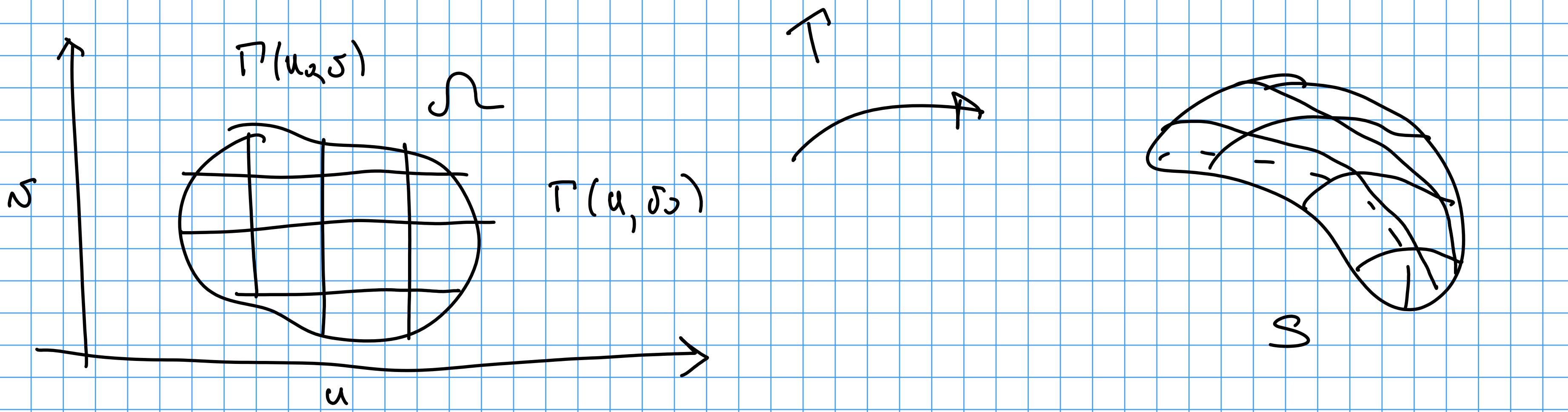
alla superficie nel punto $T(u_0,v_0)$



La condizione sopra è equivalente a:

$$N(u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0 \quad \text{in ogni } (u,v) \in \Omega$$

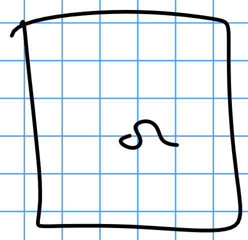
Il vettore $N(u,v)$ rappresenta una <u>normale</u> alla superficie nel punto $\Gamma(u,v)$



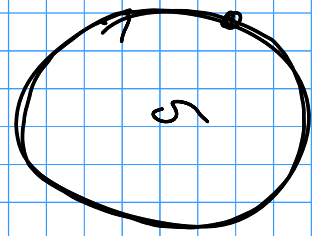
Def. (b) Se Ω è piano chiuso — IN QUESTO CASO

PRENDO Ω DOMINIO REGOLARE CHIUSO

$$\left(\Omega = \{ (u,v) : G(u,v) \leq 0 \}, \ \nabla G \neq 0 \text{ su } \partial\Omega = \{ G(u,v) = 0 \} \right)$$



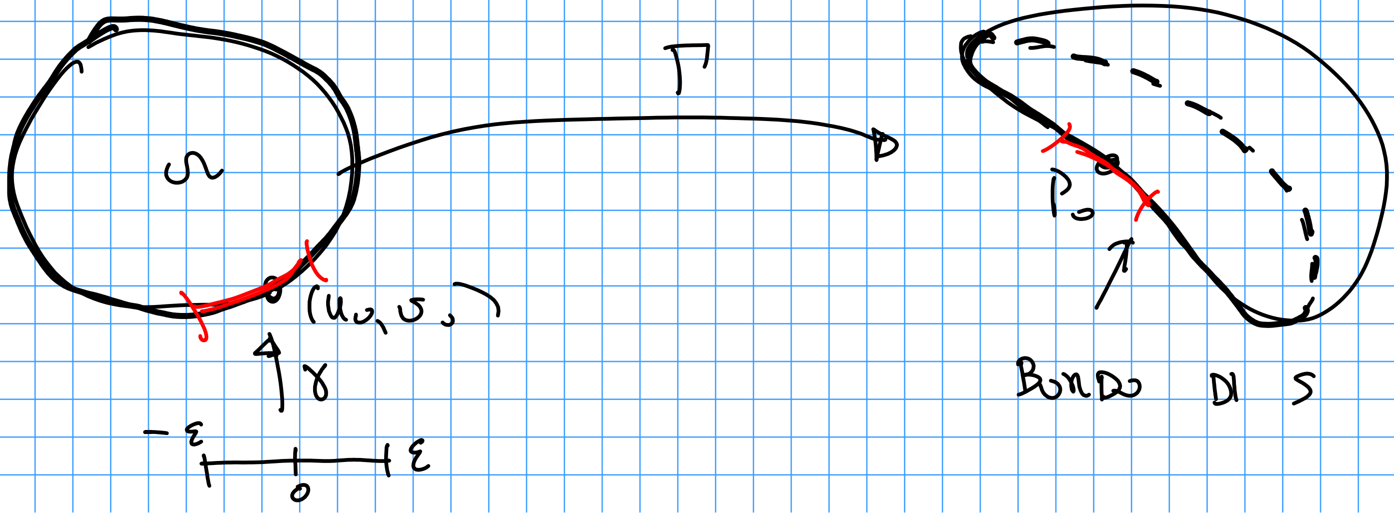
NO



SI

STESSA IPOTESI $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0$

IN QUESTO CASO Γ descrive una "SUPERFICIE CON BORDO" e il "bordo di S" è $\Gamma(\partial\Omega)$



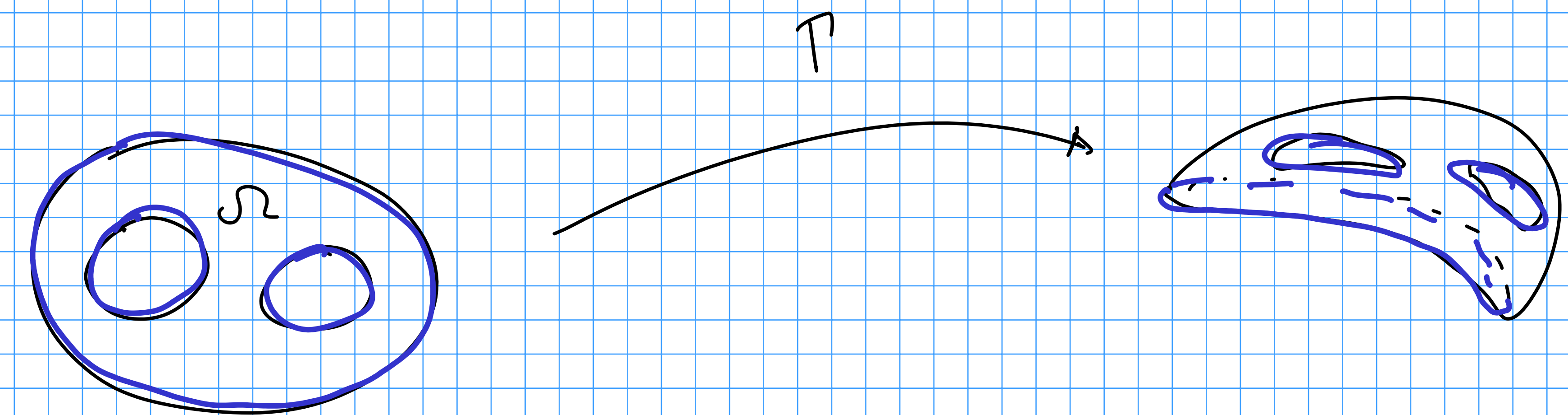
Se $P_0 = \Gamma(u_0, v_0) \in$ BORDO DI S

so che $\exists$ $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ con $\varepsilon > 0$ che
REGOLARE

$\gamma(0) = (u_0, v_0)$ e $\gamma(t)$ descrive $\partial\Omega$ vicino a (u_0, v_0)

$\Rightarrow$ $\gamma_1(t) := \Gamma(\gamma(t))$ è una curva da $]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$

tale che $\gamma_1(0) = P_0$ e γ_1 descrive il bordo di S, vicino a P_0



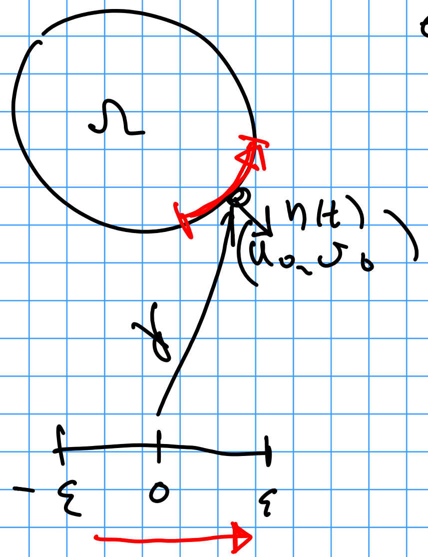
"il bordo può avere vari pezzi"

Def (VERSO).

Se (u_0, v_0) è in $\partial\Omega$ e $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$

è una curva regolare con $\gamma(0) = (u_0, v_0)$

e γ descrive $\partial\Omega$ vicino a (u_0, v_0)



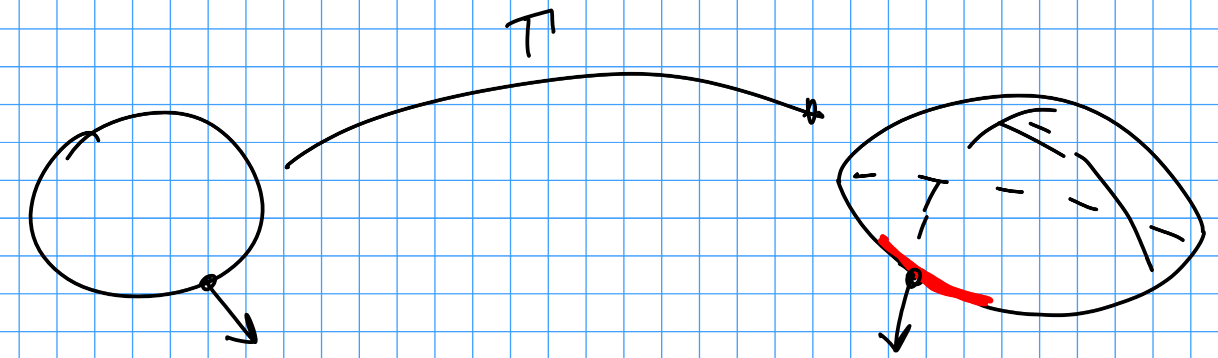
Dico che γ HA VERSO COERENTE CON Ω se il punto $\gamma(t)$ si muove tenendo Ω a sinistra $\Longleftrightarrow$ LA TERNA $n(t)$, $\gamma'(t)$, $\vec{K}$ è DESTRORSA dove $n(t)$ è la normale uscente da Ω in $\gamma(t)$

$(n(u,v) = \nabla G(u,v)$ se $\Omega = \{G < 0\}$

e $G(u,v) \geq 0$)

ANALOGAMENTE UNA CURVA (REGOLARE) $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ TALE CHE $\gamma_1(t) \in$ bordo di S HA VERSO COERENTE CON S SE $\gamma_1 = T \circ \gamma$ con γ che percorre

$\partial\Omega$ in modo coerente con Ω



$\iff$ La terna $\left(n(t),\ \gamma_1'(t),\ N(t)\right)$ è destrorsa

(IMMAGINE DI ∇G TRAMITE $d\Gamma$)

$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$

SE S È UNA SUPERFICIE PARAMETRICA $\Rightarrow$

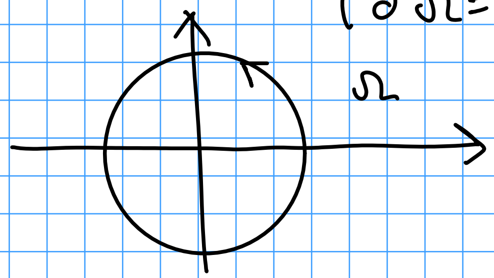
- HO UN VERSO DELLE NORMALI
- HO UN VERSO SUL BORDO

<u>OSS.</u> IL BORDO DELLA SUPERFICIE <u>NON</u> È LA FRONTIERA DEL SUPPORTO $\partial(\Gamma(\Omega))$

ESEMPIO

$\Omega = B(0,1) = \{ u^2+v^2 \le 1 \}$

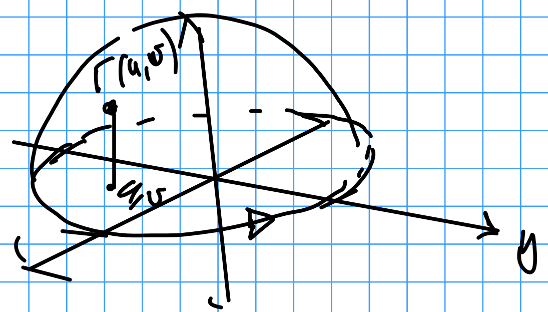
$(\partial \Omega = \{u^2+v^2=1\})$



$\Gamma(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$

Γ descrive S^+ "l'emisfero nord" della sfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$

$\Gamma(\Omega) = \{x^2+y^2+z^2=1, \ z \geq 0\}$



IL BORDO DI QUESTA SUPERFICIE È

$\{x^2+y^2=1, \ z=0\}$

Posso descrivere $\partial\Omega$ con $\gamma(t) = \vec{i}\cos(t) + \vec{j}\sin(t)$

IN MODO COERENTE con Ω $\Rightarrow$

descrivo il bordo di S^+ con la stessa curva (VISTA IN $\mathbb{R}^3$)

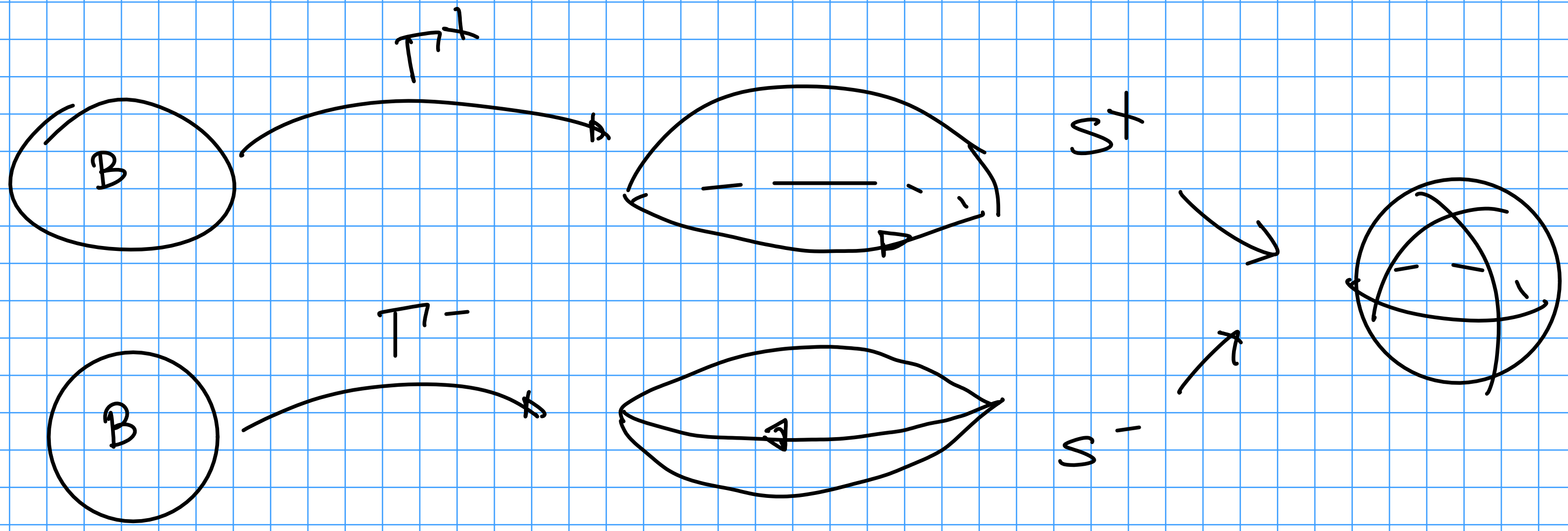
PERÒ $\partial S^+ \neq S^+$ (PARLANDO DI FRONTIERA)

LA SFERA DI $\mathbb{R}^3$: $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$

non si può descrivere con una superficie parametrica

(NON POSSO TROVARE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA (CONTINUA) CON S)

POSSO DESCRIVERE S "INCOLLANDO" DUE SUP. PARAMETRICHE



$\Gamma^+(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ $\Gamma^-(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$

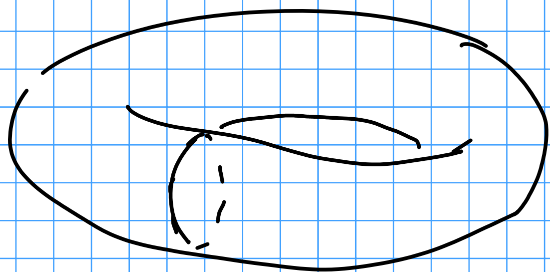
<u>IDEA</u>: $S = S_1 \cup S_2 \quad (+ S_3 \dots)$

S_1 superficie parametrica (con bordo)
S_2 " " (" ")

e nei punti P di intersezione i due versi sono discordi

IN QUESTO MODO POTREI DEFINIRE UNA NOZIONE GENERALE DI SUPERFICIE

PER ES IL <u>TORO</u>



HA BISOGNO DI
TRE PEZZI
(se voglio $\Gamma_i : \Omega_i \to S$ siano <u>biunivoche</u>)

<u>INTEGRALE SU UNA SUPERFICIE</u>

Def. (INTEGR. DI PRIMO TIPO – CASO PARAMETRICO)

S superficie parametrica (cioè $S = \Gamma(\Omega)$ con ....)

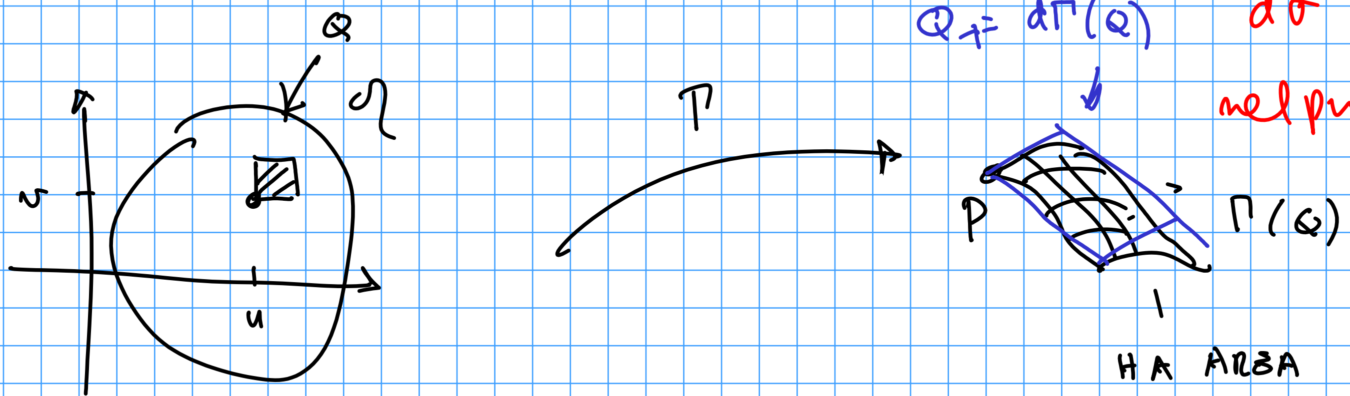
$f : S \to \mathbb{R}$

CHIAMO INTEGRALE DI f SU S IL NUMERO

$$\boxed{\iint_S f \, d\sigma := \iint_\Omega f(\Gamma(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \right\| du \, dv}}$$

$d\sigma$ = elemento di area nel punto $\Gamma(u,v)$

$Q_T := d\Gamma(Q)$



$P = \Gamma(u,v)$

HA AREA PARI A

$$|Q_1| = |Q| \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial u} \otimes \frac{\partial u}{\partial v} \right\| \simeq \text{AREA}(\Gamma(Q))$$

IN PARTICOLARE SI DEFINISCE L'AREA della SUPERFICIE

S COME

$$A(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

PER ESEMPIO $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) = \vec{i}\, u + \vec{j}\, v + \sqrt{1-\dots}\ \vec{k}$ da $B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$

in $\mathbb{R}^3$ (S^+ = emisfero nord della sfera)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{i} + \frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{k} = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{j} - \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{k}$$

(es. solo in $\mathring{B} = \{u^2+v^2<1\}$)

$$N(u,v) = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{i} \otimes \vec{j} - \vec{i} \otimes \vec{k}\left(\frac{v}{(1-u^2-v^2)^{1/2}}\right) - \vec{k} \otimes \vec{j}\, \frac{u}{(1-u^2-v^2)^{1/2}} + 0$$

$$= \vec{k} - \vec{i}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - \vec{j}\,\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\|N(u,v)\|^2 = \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1 =$$

$$\frac{u^2+v^2+1-u^2-v^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1}{1-u^2-v^2}$$

$$\|N(u,v)\| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \neq 0 \quad \left(\text{DUNQUE } \frac{\partial \sigma}{\partial v} \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial u} \text{ lin. ind.} \right)$$

Calcoliamo l'area :

$$\iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \overset{\text{(coord. polari)}}{=}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \; \rho \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$$

$$s = 1-\rho^2 \qquad ds = -2\rho\, d\rho \qquad \pi \int_1^0 -\frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

$$= \pi \left[2\sqrt{s} \right]_0^1 = 2\pi$$

(TORNA CON IL FATTO CHE S^+ = MEZZA SFERA)

TEOREMA (INVARIANZA DELL' INTEGRALE PER RIPARAM.)

Se S è una superficie parametrica descritta da

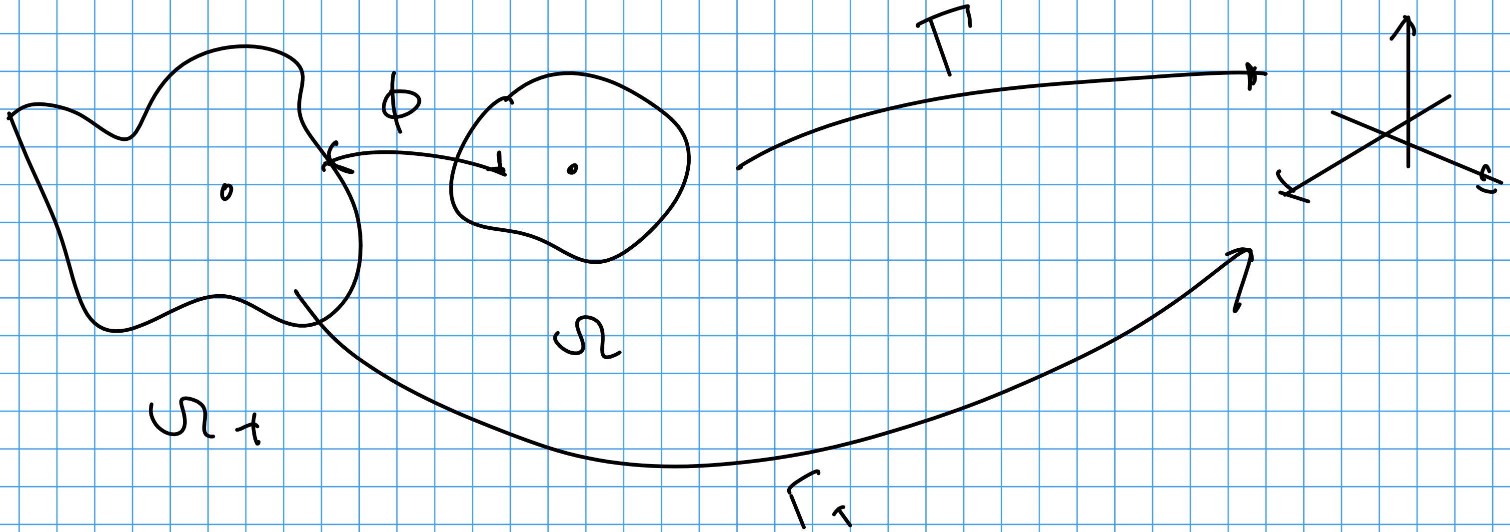
$\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$

Se $\phi : \Omega_1 \to \Omega$ con $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$

ϕ BIGETTIVA diff., ϕ^{-1} diff.

DICO CHE $\Gamma_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, definita da $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$,

È UNA "RIPARAMETRIZZAZIONE DI S"



ALLORA $$\iint_{\Gamma} f \, d\sigma = \iint_{\Gamma_1} f \, d\sigma$$ (per qualunque f)

INFATTI

$$\iint_{\Gamma_1} f\, d\sigma = \iint_{\Omega_1} f(\Gamma_1(u',v')) \cdot \left\| \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u'} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v'} \right\| du'\,dv' \qquad \Gamma \circ \phi$$

$$= \iint_{\Omega_1} f(\Gamma_1(u',v')) \left\| \left(J_\phi(u',v') \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \right) \otimes \left(J_\phi(u',v') \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right) \right\| du'\,dv'$$

$$= \iint_{\Omega_1} f(\Gamma(\phi(u',v'))) \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\phi(u',v')) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\phi(u',v')) \right\| \left| \det J_\phi(u',v') \right|$$

$$\left(\| A v_1 \otimes A v_2 \| = |\det A| \, \| v_1 \otimes v_2 \| \right)$$

= (cambio di variabile

$$\iint_{\Omega} f(\Gamma(u,v)) \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv$$

$$= \iint_{\Gamma} f\, d\sigma$$