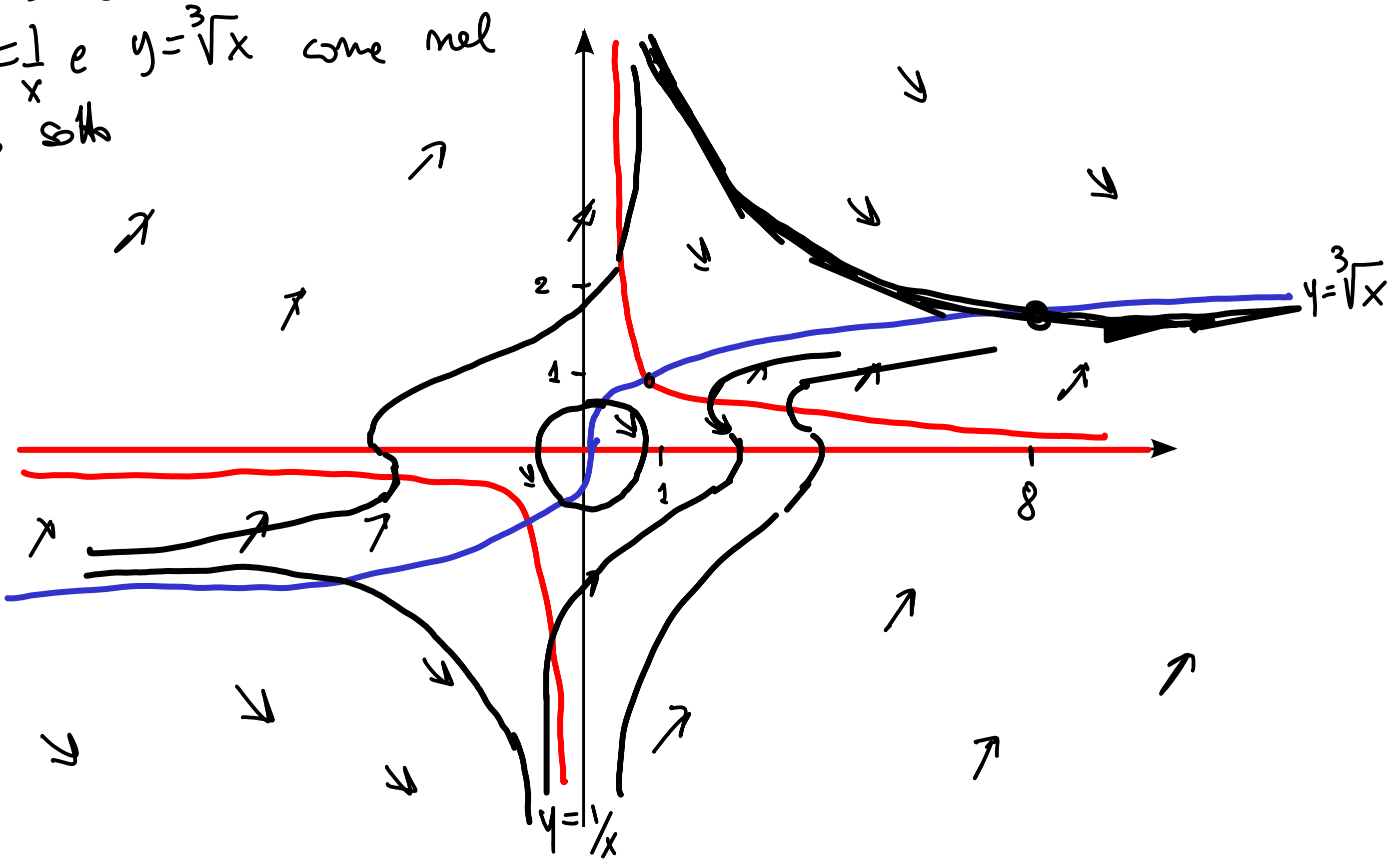
3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^3 - x}{3y(1-xy)}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

Vale Cauchy dove $y(1-xy) \neq 0$. $\to$ FUORI DA $y=0$ e da $y=\frac{1}{x}$.

Non ci sono sol. costanti. La monotonia dipende dalle curve $y=0$, $y=\frac{1}{x}$ e $y=\sqrt[3]{x}$ come nel disegno sotto



(b) Si trovi un integrale primo per l'equazione (3p.).

Il comp $\vec{f} = (x-y^3)\vec{i} + 3y(1-xy)\vec{j}$ è già conservativo (non servono fattori integranti) dato che

$\frac{\partial}{\partial y}(x-y^3) = -3y^2$ $\quad \frac{\partial}{\partial x}(3y - 3xy^2) = -3y^2$. Se ϕ è un potenziale deve essere

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x - y^3 \iff \phi = \frac{x^2}{2} - xy^3 + c(y)$. Derivando in y trovo

$\frac{\partial}{\partial y}\phi = -3xy^2 + c'(y)$ che deve fare $3y - 3xy^2 \iff c' = 3y$

cioè $c(y) = \frac{3}{2}y^2$. In definitiva $\phi(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2 - 2xy^3}{2}$.

(c) Si consideri la $y(x)$ relativa al dato iniziale $(8,2)$ e si trovino $\underline{x}$, $\overline{x}$ estremi dell'intervallo massimale di esistenza di $y(x)$ e $\underline{y}$ e $\overline{y}$, rispettivamente i limiti di $y(x)$ a tali estremi. Usando queste informazioni si tracci un grafico qualitativo di $y(x)$ nel diagramma della pagina precedente (3p.).

Se prendo $x>8$ $y(x)$ cresce e non può più passare per $y=\sqrt[3]{x}$.
DUNQUE $\boxed{\overline{x}=+\infty}$ e $\overline{y}\in\,]2,+\infty]$. DICO CHE $\boxed{\overline{y}=+\infty}$. Se fosse $\overline{y}\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow c = \lim_{x\to+\infty}\phi(x,y(x)) = \lim_{x\to+\infty,\, y\to\overline{y}} \frac{x^2+3y^2-2xy^3}{2} = +\infty$ (VINCE x^2) $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

Se $x<8$ $y(x)$ decresce e non può incontrare $y=1/x$. $\Rightarrow \underline{x}\in[0,2[$ e
$\boxed{\underline{y}=+\infty}$. Dico che $\boxed{\underline{x}=0}$. Se no avrei $c=\lim_{x\to\underline{x}}\phi(x,y(x)) =$
$\lim_{x\to\underline{x},\, y\to+\infty}\frac{x^2+3y^2-2xy^3}{2} = -\infty$ (VINCE y^3) IMPOSSIBILE

4. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(t)=t^2$ per $0\le t\le\pi$ e $f(t)=-t^2$ per $-\pi<t\le 0$, ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodica.

(a) Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di f (4p.).

f è dispari $\Rightarrow a_n=0\ \forall n$ e $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\sin(nt)$

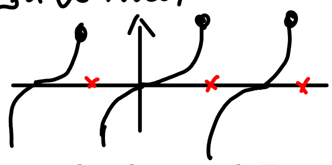
$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} 2t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)$

$+ \frac{4}{n\pi}\underbrace{\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}(\cos(n\pi)-1) = \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}((-1)^n-1)$

(b) Si dica se la serie di Fourier trovata sopra converge uniformemente a f (2p.).

$\boxed{\text{NON CONVERGE UNIF.}}$ SE LO FACESSE $\Rightarrow$ $f(t)$ sarebbe continua
(somma uniforme di continue). Ma f non è continua in π
(e in $\pi+2k\pi$)



(c) Si dica (motivando) per quali x la serie di Fourier converge puntualmente a f in x (2p.).

Dato che f è regolare a tratti la serie converge puntualmente
nelle x in cui f è continua e cioè nelle $\boxed{x\neq\pi+2k\pi}$
Nelle $x=\pi+2k\pi$ la serie converge a zero (media tra limite dx
e limite sx) che è $\neq$ da $f(\pi+2k\pi)=\pi^2$