Analisi Matematica II
Lezione 54
19 aprile 2016

Consideriamo il sistema di eq. diff. espresso da

$$(*) \quad \boxed{Y'(x) = F(x, Y(x))} \quad \leftarrow \quad (*) \begin{cases} y_1'(x) = F_1(x, y_1 \dots y_N) \\ \vdots \\ y_N'(x) = F_N(x, y_1 \dots y_N) \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

<u>DEF.</u> Dico che una funzione $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è un <u>INTEGRALE PRIMO</u> per $(*)$ se per ogni $Y(x)$ soluzione di $(*)$ si ha $\phi(Y(x)) = \phi(y_1(x), \dots, y_N(x))$ è costante in x.

PROPRIETÀ Se ϕ è diff. e F è Lipschitziana, F non dipende da x (CASO AUTONOMO), allora

$$\boxed{\phi \text{ è int. primo per } (*) \iff \nabla\phi(P)\cdot F(P) = 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^N}$$

(F è a valori in $\mathbb{R}^N \Rightarrow F$ è un campo).

Dim. ($\Leftarrow$) Suppongo $\nabla\phi$ perpendicolare a F. Sia $Y(x)$ una sol. di $Y' = F(Y)$. Calcoliamo

$$\frac{d}{dx}\phi(Y(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata} \\ \text{della funzione} \\ \text{composta}}}{=} \nabla\phi(Y(x))\cdot Y'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ Y \text{ risolve} \\ \text{l'eq.}}}{=} \nabla\phi(Y(x))\cdot F(Y(x)) = 0$$

$\Rightarrow \phi(Y(x))$ è costante (ϕ è int. primo).

(VICEVERSA $\Rightarrow$) Supponiamo ϕ sia un int. primo per $(*)$.

Prendiamo $P \in \mathbb{R}^N$ e risolviamo l'equazione $(*)$ con la condizione $Y(0) = P$. Per ipotesi $\phi(Y(x)) = \text{costante} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\phi(Y(x)) = 0 \Rightarrow \nabla\phi(Y(x))\cdot F(Y(x)) = 0$$

Mando $x \to \infty$ $\Rightarrow$ $\nabla \phi(P) \cdot F(P) = 0$

Dato che lo posso fare per ogni $P \in \mathbb{R}$ ho DIM. LA TESI. #

ESEMPIO (IMPORTANTE). Consideriamo l'eq.

$$(**) \quad Y'' = \nabla F(Y) \qquad (Y(x) \in \mathbb{R}^N - \text{per es. } N=3)$$

(Y descrive la traiettoria di un punto (di massa 1) che si muove in un campo di forze conservativo).

$(**)$ è del II° ordine. Lo posso trasformare in un problema del I° ordine, chiamando $Z = Y'$ e quindi

$$(***) \begin{cases} Y' = Z \\ Z' = \nabla F(Y) \end{cases}$$

(incognita è (Y, Z)

$F_1(Y,Z) = \begin{pmatrix} Z \\ \nabla F(Y) \end{pmatrix} \Big\} \mathbb{R}^{2N}$

PONGO $\Phi(Y,Z) := \frac{1}{2}\|Z\|^2 - F(Y)$. Dico che Φ è un int. primo per $***$. Infatti

$$\nabla \phi(Y,Z) = \begin{pmatrix} -\nabla F(Y) \\ Z \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{2}\|z\|^2 - F(Y)\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i} F(y) \\ \frac{\partial}{z_i}\left(\frac{1}{2}\|z\|^2 - F(y)\right) = \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{2}\|z\|^2 = z_i \end{array} \right.$$

Se faccio $\nabla \phi(Y,Z) \circ F_1(Y,Z) =$

$$\begin{pmatrix} -\nabla F(Y) \\ Z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} Z \\ \nabla F(Y) \end{pmatrix} = -\nabla F(Y) \circ Z + Z \cdot \nabla F(Y) = 0$$

Dunque, se $\begin{pmatrix} Y(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$ risolve $***$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\|Z(x)\|^2 - F(Y(x))$ è costante

$\Leftrightarrow$ se Y risolve $(**)$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\|Y'(x)\|^2 - F(Y(x))$ è costante $\Big\}$ CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

ALTRO ESEMPIO (IN $\mathbb{R}^2$). Consideriamo il sistema

$$(S) \begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \end{cases} \quad \leftarrow \vec{f}(x,y)$$

dove $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue e cerco $x(t), y(t)$ $t \in \mathbb{R}$

(Posso vedere $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ come linee di campo per $\vec{f}(x,y) = a(x,y)\vec{i} + b(x,y)\vec{j}$)

PERPEND.

FATTO Se $\vec{f}_1(x,y) = -b(x,y)\vec{i} + a(x,y)\vec{j}$ è conservativo, e se ϕ è un potenziale per $\vec{f}_1$

$\Rightarrow$ ϕ è un integrale primo per (S).

INFATTI

$$\nabla\phi(x(t), y(t)) = -b(x(t), y(t))\vec{i} + a(x(t), y(t))\vec{j}$$

che è chiaramente perpendicolare a $a(x,y)\vec{i} + b(x,y)\vec{j}$

Per trovare un int. primo di (S) cerco un potenziale per il campo $-b(x,y)\vec{i} + a(x,y)\vec{j}$

LO POTRÒ FARE se questo campo è irrotazionale (e definito dappertutto), cioè se $-\frac{\partial}{\partial y} b = \frac{\partial}{\partial x} a$

PERÒ POSSO FARE LA STESSA COSA SE TROVO UNA FUNZIONE SCALARE $\lambda(x,y)$ tale che

$$\vec{f}_2(x,y) = \lambda(x,y)\left(-b(x,y)\,\vec{i} + a(x,y)\,\vec{j}\right) = \lambda \vec{f}_1$$

sia conservativo. INFATTI se ϕ è un potenziale per $\vec{f}_2 \Rightarrow \nabla\phi = \vec{f}_2 = \lambda \vec{f}_1 \perp f$

Un λ con la proprietà sopra (tale che $\lambda(-bi+aj)$ sia conservativo), si chiama FATTORE INTEGRANTE per (S)

Riassumendo: per trovare un integrale primo per il sistema

$$\begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \end{cases}$$

mi basta trovare un fattore integrante $\lambda(x,y)$ tale che

$$\lambda(x,y)\left(-b(x,y)\,\vec{i} + a(x,y)\,\vec{j}\right)$$ sia conservat.

ESEMPIO Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ NUMERI > 0. CONSIDER.

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y \end{cases}$$

$x(t)$ e $y(t)$ sono due popolazioni all'istante t

Per entrambe la crescita x' / y' è proporzionale a x / y

Però la crescita di x è "rallentata" dalla presenza di y mentre la crescita di y è "aumentata" dalla presenza di x

$x \rightarrow$ PREDA $\qquad y \rightarrow$ PREDATORE

(Le x HANNO INFINITA ERBA ...)

CERCO UN FATTORE INTEGRANTE, CIOÈ UN $\lambda(x,y)$ TALE CHE IL CAMPO

$$\lambda(x,y)\left[(d - cx)y \vec{i} + (a - by)x \vec{j} \right]$$ sia irrotazionale

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x,y) \cdot (d - cx)y = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x,y)(a - by)x$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_y(x,y)(d - cx)y + \lambda(x,y)(d - cx) = \lambda_x(x,y)(a - by)x + \lambda(x,y)(a - by)$$

$$\underbrace{\left(y\lambda_y + \lambda\right)}(d - cx) = \underbrace{\left(x\lambda_x + \lambda\right)}(a - by)$$

Per quanto sopra basta $(\Rightarrow \sigma = 0)$

$$\begin{cases} y\lambda_y + \lambda = 0 \\ x\lambda_x + \lambda = 0 \end{cases}$$

$\longleftrightarrow \quad \frac{d}{dy}\lambda = -\frac{\lambda}{y} \Rightarrow \lambda = \frac{c(x)}{y}$

$\longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\lambda = -\frac{\lambda}{x} \Rightarrow \lambda = \frac{d(y)}{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda(x, y) = \frac{K}{xy}} \quad \text{con } K \in \mathbb{R}$$

Ho trovato che, per esempio, $\frac{1}{xy}$ è un fatt. int.

CERCHIAMO L'INT. PRIMO, TROVANDO UN POTENZIALE

ϕ DI $\frac{d - cx}{x}\vec{i} + \frac{a - by}{y}\vec{j}$. Deve essere

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d - cx}{x} \longrightarrow \phi = d\ln|x| - cx + \text{cost}(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{a - by}{y} \longrightarrow \phi = a\ln|y| - by + \text{cost}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = d\ln|x| + a\ln|y| - cx - by + k}$$

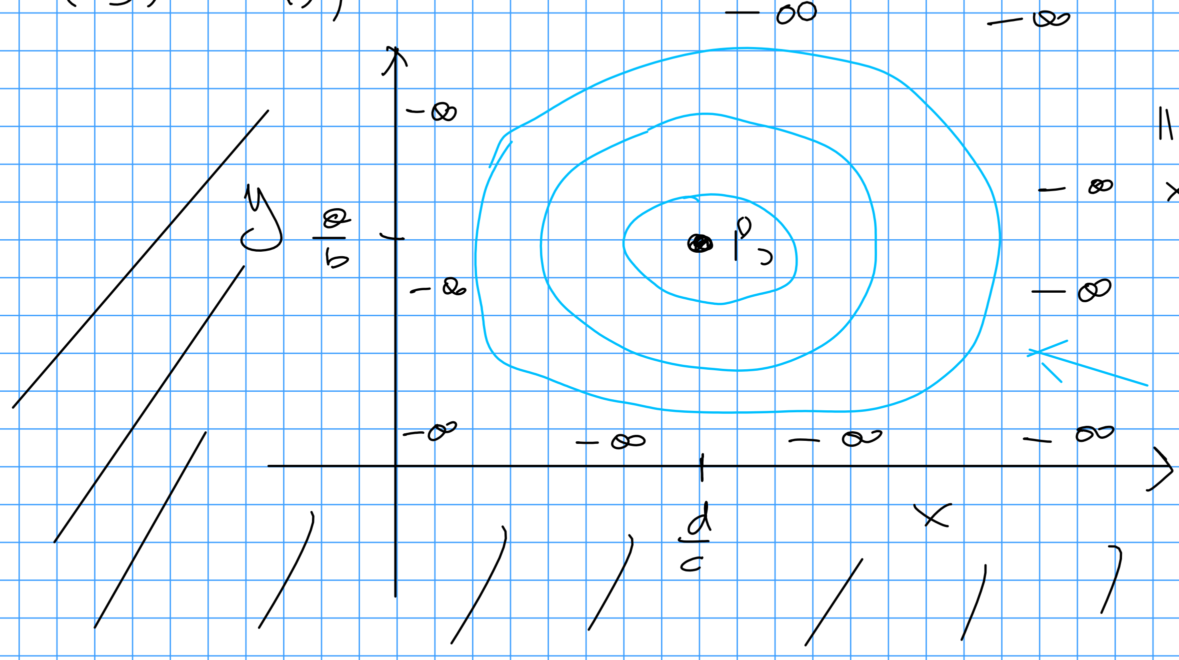
DUNQUE MI INTERESSANO LE LINEE DI LIVELLO DI TALE ϕ

STUDIAMO COME È FATTO $\phi(x,y)$

$$\nabla\phi(x,y) = \frac{d-cx}{x}\,\vec{i} + \frac{a-by}{y}\,\vec{j}$$

- C'È UN PUNTO STAZ. IN $x = \frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{b}$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = -\infty$ quando $x_0 = 0$ / $y_0 = 0$

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ x>0 \; y>0}} \phi(x,y) = -\infty$$



PROBABILE FORMA DELLE LINEE DI LIVELLO

SONO CURVE CHIUSE

SI CAPISCE CHE $P_0 = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ è di massimo

Possiamo anche farlo mediante l'Hessiana:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d}{x} - c \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{a}{y} - b$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{d}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{a}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H_\phi\underbrace{\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)}_{P_0} = \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \leftarrow \text{definita negativa}$$

P_0 pto di max.

DATO CHE LE SOL. DESCRIVONO CURVE CHIUSE

$\Rightarrow$ LA "DINAMICA È PERIODICA"

ALTRA APPLICAZIONE

Supponiamo di avere un'eq. ordinaria del I° ordine:

$$(E) \quad y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

DICO CHE SE il campo

$$\vec{f}(x,y) = a(x,y)\,\vec{i} + b(x,y)\,\vec{j}$$

è conservativo e se ϕ è un potenziale per $\vec{f}$ $\Longrightarrow$

$\phi(x, y(x))$ è costante su ogni y soluzione di (E)

Infatti

$$\frac{d}{dx}\phi(x, y(x)) = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}_{a} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))}_{b}\,\underbrace{y'(x)}_{-\frac{a}{b}} = 0$$

STESSO DISCORSO SE ϕ è potenziale per $\lambda(x,y)\,\vec{f}(x,y)$

(dove λ è scalare) . Infatti in questo caso

$$\frac{d}{dx}\phi(x, y(x)) = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}_{=\lambda \cdot a} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))}_{\lambda \cdot b} \cdot \underbrace{y'(x)}_{-\frac{a}{b}} = \lambda\left(a - b \cdot \frac{a}{b}\right) = 0$$

DUNQUE TROVO UN INT. PRIMO PER L'EQ.

$$y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

se riesco a trovare un "fattore integrante" $\lambda(x,y)$ tale che $\lambda(x,y)\left(a(x,y)\,\vec{i} + b(x,y)\,\vec{j}\right)$ sia irrotazionale (a, b definite su $\mathbb{R}^2$ stellato)

ESEMPIO

$$y' = \frac{-y}{4 - xy + x}$$

MI SERVE $\lambda(x,y)$ tale che

$$\lambda(x,y)\,y\,\vec{i} + \lambda(x,y)(4 - xy + x)\,\vec{j}$$

sia irrotazionale, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)\,y = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)(4 - xy + x)$$

SUGGERIMENTO ESTERNO: CERCO $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$

$\lambda(t)$ funzione di 1 variabile, $t = xy$

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y) = \lambda'(xy)\frac{\partial}{\partial y}xy = x\lambda'(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy) = \lambda'(xy)\frac{\partial}{\partial x}xy = y\lambda'(xy)$$

$\Rightarrow$ TROVO LA CONDIZIONE

$$x\lambda'(xy)\cdot y + \lambda(xy)\cdot 1 = y\lambda'(xy)(4 - xy + x) + \lambda(xy)(-y+1)$$

(spero di trovare solo espressioni in xy)

$$\lambda'(xy)\left(\cancel{xy} - 4y + xy^2 - \cancel{xy}\right) = \lambda(xy)\left(-\cancel{1} - y + \cancel{1}\right)$$

$$y\,\lambda'(xy)(xy-4) = -y\,\lambda(xy) \qquad \text{semplifico } y$$

$$\lambda'(xy) = \frac{-\lambda(xy)}{xy-4} \qquad \boxed{\lambda'(t) = \frac{-\lambda(t)}{t-4}} \quad \text{eq. ordinaria in } \lambda$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-\int \frac{dt}{t-4}} = \frac{\lambda_0}{t-4} \qquad \text{POSSO PRENDERE } \lambda_0 = 1$$

$$\lambda(xy) = \frac{1}{xy-4}$$

PER L'INT. PRIMO DEVO TROVARE

UN POTENZIALE ϕ PER

$$\frac{y}{xy-4}\,\vec{i} + \frac{4-xy-x}{xy-4}\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{xy-4} \rightarrow \phi(x,y) = \ln|xy-4| + c(y)$$

NE SEGUE $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{xy-4} + c'(y)$ che deve essere =

$$\frac{4-xy+x}{xy-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(y) = \frac{4-xy+x}{xy-4} - \frac{x}{xy-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad c(y) = -y + \text{cost.}$$

$$\phi(x,y) = \ln|xy-4| - y$$

Le sol. dell'equazione verificano

$\ln|xy-4| - y = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$c + y = \ln|xy-4|$

$e^{c+y} = xy - 4 \iff x = \dfrac{4+e^{c+y}}{y}$

permette di ricavare il comportamento di $y(x)$

(disegno $x(y)$ e poi inverto)