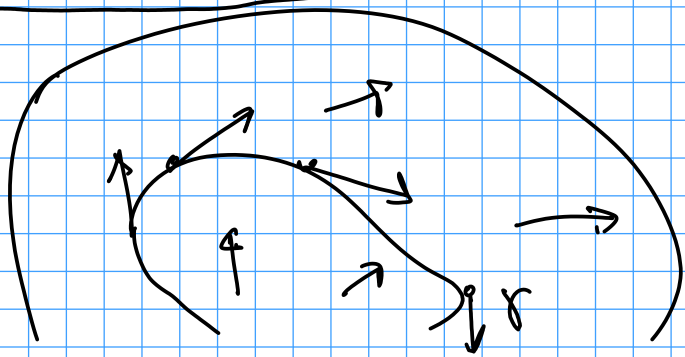
Analisi Matematica II
Lezione 53
18 aprile 2016

LINEE DI CAMPO (di forza) relative a un campo di vettori $\vec{f}(x)$ $\quad \vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$

<u>Def</u> Una curva (regolare) $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è una linea di campo per $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ se per ogni $t \in [a,b]$

$$\boxed{\gamma'(t) = \vec{f}(\gamma(t))}$$



<u>ESEMPI</u> $N = 2$

$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Cerco le curve $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\gamma = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j}$ con

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = \dfrac{-\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)} \\ \gamma_2'(t) = \dfrac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)} \end{cases}$$

IN MODO PIÙ ESPRESSIVO $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

DEVO RISOLVERE

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

SISTEMA DI EQ. DIFF. DEL I° ORDINE NON LINEARE

+ condizioni iniziali $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$

Moltiplico il primo per x e il secondo per y e sommo:

$$x x' + y y' = -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} = 0$$

Dunque $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right) = 0 \Rightarrow x^2+y^2$ è costante ;

Chiamo R^2 questa costante $\boxed{\left(R^2 = x_0^2 + y_0^2\right)}$, metto R nell'eq.

$$\begin{cases} x' = \frac{-y}{R^2} \\ y' = \frac{x}{R^2} \end{cases}$$

$x(0)=x_0 \quad y(0)=y_0$

derivo la I° eq:

$$x'' = -\frac{y'}{R^2} = -\frac{x}{R^4}$$

$$x'' + \frac{x}{R^4} = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = \alpha\cos\left(\frac{t}{R^2}\right) + \beta\sin\left(\frac{t}{R^2}\right)}$$

$$y' = \frac{\alpha}{R^2}\cos(t/R^2) + \frac{\beta}{R^2}\sin(t/R^2) \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = \alpha\sin(t/R^2) - \beta\cos(t/R^2) + \gamma}$$

Derivo x e impongo la prima eq.

$$x' = -\frac{\alpha}{R^2}\sin(t/R^2) + \frac{\beta}{R^2}\cos(t/R^2) = -\left(\frac{\alpha}{R^2}\cos\left(\frac{t}{R^2}\right) + \frac{\beta}{R^2}\sin\left(\frac{t}{R^2}\right) + \delta\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = 0}$$

Molto $t\infty$ $\Rightarrow$ $x_0 = \alpha$ $\qquad y_0 = -\beta$

Dunque

$$\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} =$$

$$\left[x_0 \cos\left(\frac{t}{x_0^2+y_0^2}\right) + y_0 \sin\left(\frac{t}{x_0^2+y_0^2}\right)\right]\vec{i} +$$

$$\left[-y_0 \cos\left(\frac{t}{x_0^2+y_0^2}\right) + x_0 \sin\left(\frac{t}{x_0^2+y_0^2}\right)\right]\vec{j}$$

SI CAPISCE CHE γ descrive una circonferenza percorso con vel. costante $= R = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$

SI POTEVA FARE "USANDO LE COORD POLARI"

Dato un angolo θ. Definisco

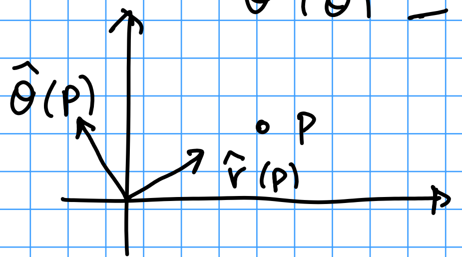
$$\hat{r}(\theta) \doteq \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\hat{\theta}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

Allora se $(x,y) \in \mathbb{R}$ con $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

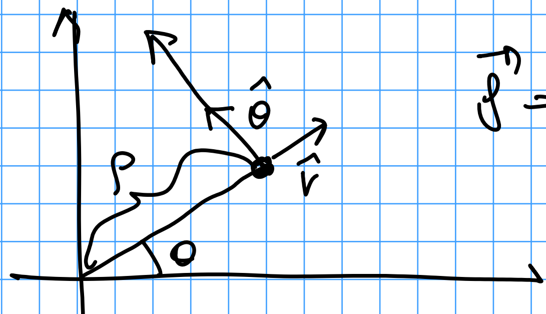
$$\Rightarrow \quad \hat{r}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$$

$$\hat{\theta}(\theta) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j} \quad \leftarrow$$



Scrivo il comp $\vec{f}$ in termini di $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$

$$\boxed{\vec{f}(\rho,\theta) = \frac{\hat{\theta}}{\rho}}$$



$\vec{f} = \hat{\theta}\cdot\rho$

CERCO LA LINEA DI FORZA γ IN COORD POLARI, CIOÈ

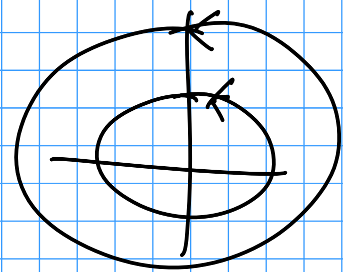
$$\gamma(t) = \rho(t)\,\hat{r}(\theta(t)) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \gamma'(t) &= \rho'(t)\,\hat{r}(\theta(t)) + \rho(t)\,\hat{\theta}(\theta(t))\,\theta'(t) \\ &\left(= \vec{f}(\rho,\theta)\right) = \frac{\hat{\theta}(t)}{\rho} \end{aligned}\right]$$

DUNQUE $\begin{cases} \rho' = 0 \\ \rho(t)\,\theta'(t) = \rho(t) \end{cases}$ $\qquad \rho = \text{costante} = \rho_0$, $\quad \theta' = \dfrac{1}{\rho_0^2}$

$$\rho(t) = R \qquad \theta(t) = \frac{t}{R_0^2} + t_0$$

(abbiamo ottenuto il risultato di prima.



ALTRO ESEMPIO

$\hat{R}$

$$\vec{f}(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$$

$\hat{\theta}$

PASSO IN COORD POLARI

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \rho\, \hat{r}(\theta) \qquad \left(x\vec{i} + y\vec{j} = \rho \right.$$

$$-y\vec{i} + x\vec{j} = \rho\, \hat{\theta}(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \hat{r}(\theta) + \hat{\theta}(\theta)}$$

Se $\gamma(t) = \rho(t)\, \hat{r}(\theta(t))$ (COME PRIMA)

$$\gamma'(t) = \rho'(t)\, \hat{r}(\theta(t)) + \rho(t)\, \theta'(t)\, \hat{\theta}(\theta(t))$$

e dunque $\left(\gamma' = \vec{g}(\gamma(t)) \right)$

$$\begin{cases} \rho' = 1 \\ \rho\theta' = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \rho(t) = t + \rho_0 \quad (\rho_0 = \rho(0)) \\ (t+\rho_0)\,\theta' = 1 \end{array}$$

$$\theta' = \frac{1}{t+\rho_0} \qquad \theta(t) = \ln(t+\rho_0) + c$$

$t = 0$ $\quad \theta_0 = \ln(\rho_0) + c \qquad c = \theta_0 - \ln(\rho_0) \Rightarrow$

$$\theta(t) = \ln(t+\rho_0) + \theta_0 - \ln(\rho_0) = \theta_0 + \ln\left(\frac{t+\rho_0}{\rho_0}\right)$$

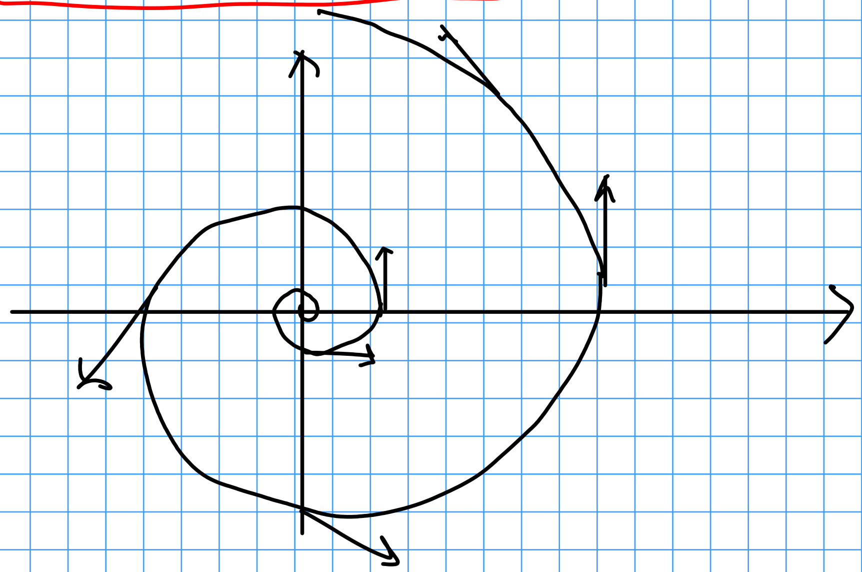
$$\boxed{\rho(t) = t + \rho_0 \qquad \theta(t) = \theta_0 + \ln\left(\frac{t+\rho_0}{\rho_0}\right)}$$

RICAVIAMO UN' EQUAZIONE PER IL SOSTEGNO DI $\gamma(t)$

$$\rho - \rho_0 = t \quad \Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \iff$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \, e^{\theta - \theta_0}}$$

SPIRALE LOGARITMICA



OSSERVAZIONE Sia dato dato un campo $\vec{f}(x)$

Supponiamo che γ sia una linea di forza per $\vec{f}$

cioè

$$\gamma'(t) = \vec{f}(\gamma(t)) \qquad \gamma(0) = X_0 \qquad (X \in \mathbb{R}^N)$$

Se $\lambda(X) > 0$ è una funzione scalare continua, consideriamo

$$\vec{f}_1(X) = \lambda(X)\,\vec{f}(X) \qquad \gamma_1(0) = X_0$$

e sia γ_1 linea di flusso per $\vec{f}_1$.

ALLORA γ_1 è una riparametrizzata di γ

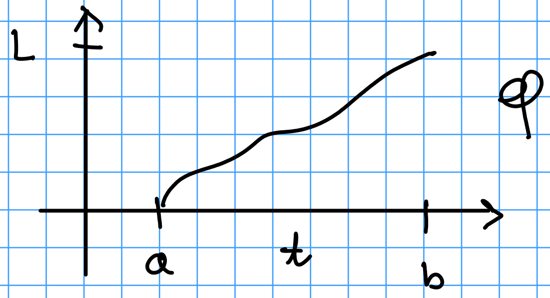
(in particolare hanno lo stesso sostegno, anche se velocità diverse)

<u>DIM.</u> Sia data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$

$$\gamma'(t) = \vec{f}(\gamma(t))$$

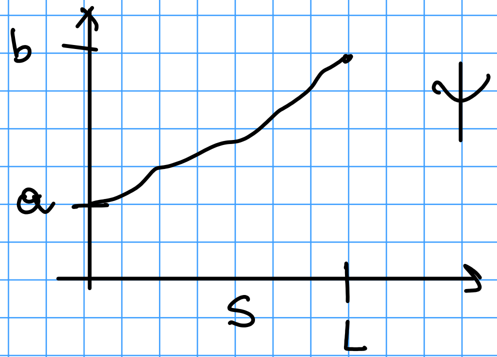
Poniamo $\displaystyle \varphi(t) = \int_a^t \frac{d\tau}{\lambda(\gamma(\tau))}$ (ben definita se $\lambda > 0$ strett. crescente in t

$$\varphi(a) = 0 \qquad \varphi(b) = \int_a^b \frac{d\tau}{\lambda(\gamma(\tau))} = L \qquad \left(\varphi'(t) = \frac{1}{\lambda(\gamma(t))}\right)$$



considero $\psi = \varphi^{-1}$

$\psi : [0, L] \to [a, b]$



Per i teoremi sulle derivate

$$\psi' = \frac{d}{ds}\psi(s) = \frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) =$$

$$\boxed{\psi' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \lambda(\gamma(\psi(s))) \,,}$$

Chiamo $\gamma_1(s) = \gamma(\psi(s))$ TROVO

$$\frac{d}{ds}\gamma_1(s) = \gamma'(\psi(s))\,\psi'(s) = \lambda(\gamma(\psi(s)))\cdot \vec{f}(\gamma(\varphi(s)))$$

$$= \lambda(\gamma_1(s))\,\vec{f}(\gamma_1(s))$$

DUNQUE $\gamma_1 = \gamma \circ \psi$ è una linea di forza

per $\lambda(x)\,\vec{f}(x)$

RICAPITOLANDO: Se sono dati $\vec{f}$ e $\gamma : [0,S] \to \mathbb{R}^n$ linea di flusso per $\vec{f}$.

Se $\lambda(x) > 0$ continua

Ho trovato una funzione $\psi : [0, L] \to [0, S]$ tale che, posto $\gamma_1(s) = \gamma(\psi(s)) \Rightarrow$ la γ_1 è linea di flusso per $\lambda(x) \vec{f}(x)$.

DATO CHE VALE IL TEOREMA DI UNICITÀ PER LE EQ. DIFF. ($\vec{f}$ LIPSCHITZIANO, PER ES C^1)

$\Rightarrow$ TUTTE LE LINEE DI FORZA SONO DI QUESTO TIPO.

LE LINEE DI FORZA PER $\lambda \vec{f}$ SI OTTENGONO RIPARAMETRIZZANDO LE LINEE DI FORZA di $\vec{f}$

PER ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}$$

posso prendere

$$\vec{f}_1(x,y) = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$$

CERCHIAMO LE LINEE DI FORZA DI f_1

$$\gamma_1 = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \implies$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

DERIVO LA PRIMA $\ddot{x} = \dot{x} - \dot{y} = x - y - x - y$

$$\ddot{x} = -2y = 2\dot{x} - 2x$$

$$y = \frac{-\dot{x} + \dot{y}}{2} = \frac{-\dot{x} + x + y}{2} \iff \frac{y}{2} = -\frac{\dot{x} + x}{2}$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

POLINOMIO CARATTERISTICO $P(z) = z^2 - 2z + 2$

RADICI

$$+1 \pm \sqrt{1-2} = +1 \pm i$$

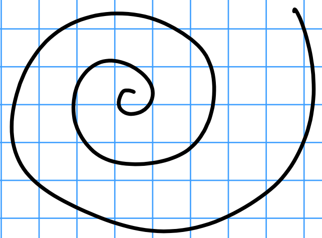
$$\implies x(t) = e^{+t}(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))$$

ANALOGAMENTE

$$y(t) = e^{+t}\left(\gamma \cos(t) + \delta \sin(t)\right)$$

SE TORNO AL SISTEMA TROVO CHE γ e δ si esprimono in termini di α e β.

IN OGNI CASO RITROVO LA SPIRALE LOGARITMICA



$\gamma(t)$ gira a velocità 1 e si espande in modo esponenziale