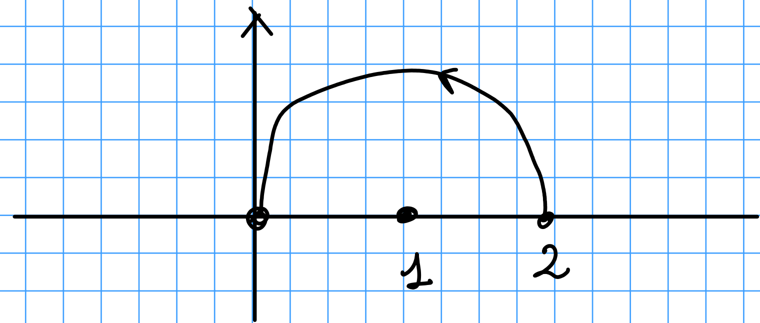
Analisi Matematica II
Lezione 51
12 aprile 2016

<u>ESERCIZIO</u> Dato il campo

$$\vec{f}(x,y) = \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}\,\vec{i} - \frac{2y}{((x-1)^2+y^2)^2}\,\vec{j}$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = (1+\cos(t))\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$

$0 \le t \le \pi$



APPLICO LA DEFINIZIONE.

$$\gamma'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^\pi f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{2\cos(t)}{(\cos^2(t)+\sin^2(t))^2}(-\sin(t)) - \frac{2\sin(t)}{(\cos^2(t)+\sin^2(t))^2}\cos(t)\right]dt =$$

$$= \int_0^{\pi} -4\sin(t)\cos(t)\,dt = -\int_0^{\pi} 2\sin(2t)\,dt = \Big[\cos(2t)\Big]_0^{\pi} = 0$$

DOMANDA: $\vec{f}$ È CONSERVATIVO ??

Vediamo se riusciamo a trovare $F(x,y)$ tale che:

(a) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}$$ e

(b) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = f_2(x,y) = \frac{-2y}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

Da (a) segue $$F(x,y) = \int \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^2+y^2} + c(y)$$

Impongo che valga (b)

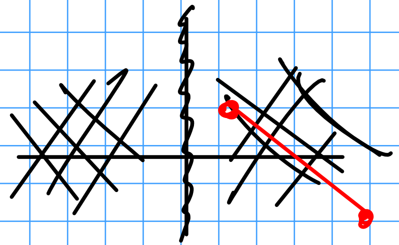
$$\frac{2y}{((x-1)^2+y^2)^2} + c'(y) = \frac{-2y}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

NON TORNA

$\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO

ESERCIZIO $\vec{f}(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\vec{i} - \frac{2y}{x}\vec{j} \qquad (x \neq 0)$

$\vec{f}$ è definita sull'unione di $\{(x,y) : x>0\}$ e $\{(x,y) : x<0\}$



DUE SEMIPIANI
OGNUNO È CONNESSO
L'UNIONE NON È CONNESSA

VOGLIO CALCOLARE L'INTEGRALE DI $\vec{f}$ LUNGO IL SEGMENTO TRA $(1,1)$ e $(4,-2)$ ($\in$ semipiano $\{x>0\}$)

- TROVIAMO UNA PARAMETRIZZAZIONE PER IL SEGMENTO

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \qquad 0 \le t \le 1$$

$$= (1+3t)\vec{i} + (1-3t)\vec{j}$$

$$\gamma'(t) = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(1+3t, 1-3t) \cdot (3\vec{i} - 3\vec{j})\, dt =$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{(1-3t)^2}{(1+3t)^2} \cdot 3 + \frac{-2(1-3t)}{1+3t} \cdot (-3) \right\} dt =$$

$$3\int_0^1 \frac{1-6t+9t^2+2(1-9t^2)}{(1+3t)^2}\,dt = 3\int_0^1 \frac{3-6t-9t^2}{(1+3t)^2}\,dt =$$

$$3\int_0^1 \left(\frac{4}{(1+3t)^2} - \underbrace{\frac{1+6t+9t^2}{(1+3t)^2}}_{=1}\right)dt = 12\int_0^1 \frac{dt}{(1+3t)^2} - 3$$

$$= \left[\frac{-4}{1+3t}\right]_0^1 - 3 = \frac{-4}{4} + 4 - 3 = 0 .$$

PROVIAMO A VEDERE SE $\vec{f}$ è conservativo, cioè se riesco a trovare $F(x,y)$ tale che

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x^2}$ (b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x}$

$$(a) \Rightarrow \quad F(x,y) = \int \frac{y^2}{x^2}\,dx = -\frac{y^2}{x} + c(y)$$

IMPONGO (b) $\Rightarrow$

$$-\frac{2y}{x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^2}{x} + c(y)\right) = -\frac{2y}{x} + c'(y) \iff c'(y) = 0$$

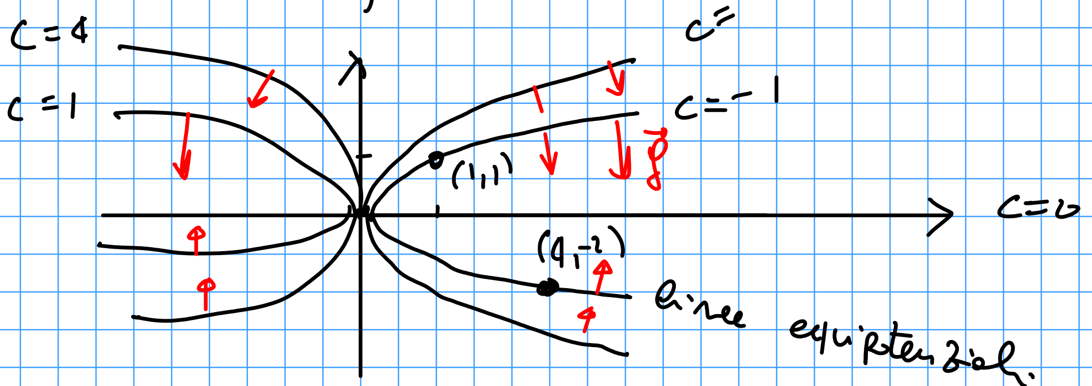
DUNQUE TROVO IL POTENZIALE $F(x,y) = -\frac{y^2}{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

- ALLORA SO CHE $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) =$

$$F(4,-2) - F(1,1) = -\frac{(-2)^2}{4} + \frac{1^2}{1} = 0$$ **TORNA**

- (Per curiosità) Vediamo le linee $F(x,y) = c \iff$

$-y^2 = cx$ (Parabole rispetto all'asse x)



ANDIAMO AVANTI ...

Dunque $\vec{f}$ è conservativo se $\exists$ F tale che $\vec{f} = \nabla F$

cioè $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} = f_N$

AMMETTIAMO CHE $\vec{f}$ sia C^1 $(\Rightarrow F$ è $C^2)$

Si ha

Schwartz

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} F = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} F = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$$

DUNQUE SE $\vec{f}$ È CONSERVATIVO VALE:

(★) $$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall\, i,j = 1 \dots N$$

(★) si esprime dicendo che $\vec{f}$ è "IRROTAZIONALE"

Dunque $\boxed{\text{CONSERVATIVO} \Rightarrow \text{IRROTAZIONALE}}$

Oss Se $N=3$ si definisce il "ROTORE" di $\vec{f}$, indicato con $\overrightarrow{\text{rot}(f)}$ o $\vec{\nabla} \otimes \vec{f}$

"Formalmente"

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & f_1 \\ \vec{j} & D_y & f_2 \\ \vec{k} & D_z & f_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2\right)\vec{i} + -\left(\frac{\partial}{\partial x} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_1\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right)\vec{k}$$

$$\left(D_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad D_z = \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$\vec{f}$ è IRROTAZIONALE $\iff \vec{\nabla} \otimes \vec{f} = 0$

Se $N=2$ si può pensare che $f_3 = 0$, f_1, f_2 NON DIPENDONO DA z

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\left(\vec{f} \text{ IRROTAZIONALE} \longleftrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

- L'IMPLICAZIONE CONTRARIA IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ CONSERVATIVO

<u>NON</u> VALE IN GENERALE

(CONTRO) ESEMPIO

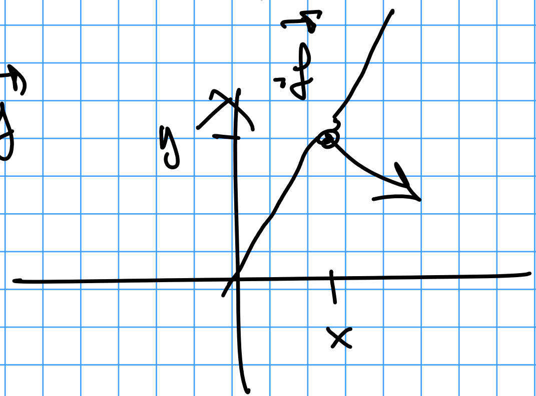
$$\vec{f}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$$

(definito se $(x,y) \neq (0,0)$)

NOTA
$$\|\vec{f}(x,y)\|^2 = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\vec{f}(x,y) \circ (x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

($\vec{f}(x,y)$ è perpendicolare a $x\vec{i} + y\vec{j}$)



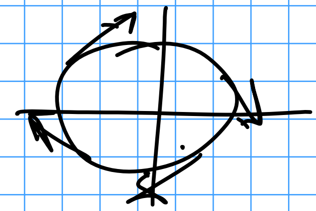
Verifichiamo che $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{\partial}{\partial x} f_2 \quad ??$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(-1)(x^2+y^2) - (-x)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(1)(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ SONO =

$\vec{f}$ è irrotazionale.



Facciamo l'integrale curvilineo di $\vec{f}$ su una circonferenza di raggio R centrata nell'origine.

$$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}$$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(t)}{\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1}}\,\vec{i} + \frac{-\cos(t)}{\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{=1}}\,\vec{j}\right)\left(-\sin(t)\,\vec{i}+\cos(t)\,\vec{j}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{-\sin^2(t)-\cos^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}-1 = -2\pi \neq 0$$

$\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO

IL PROBLEMA STA NEL FATTO CHE QUESTO CAMPO $\vec{f}$
È DEFINITO SU UN DOMINIO "CON UN BUCO" $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

Se $\vec{f}(x,y)$ fosse definito su tutto $\mathbb{R}^2$, $\vec{f}$ IRROTAZIONALE,

$\Longrightarrow \vec{f}$ conservativo.

<u>DIM.</u> Definisco $F(x,y)$ ponendo

$$F(P) \overset{\shortparallel}{=} \int_0^P \vec{f}\, d\vec{s} \;\overset{\shortparallel}{=}\; \text{INTEGRALE di } \vec{f} \text{ SUL } \underline{\text{SEGMENTO}} \text{ tra } O \text{ e } P$$

Dunque

$$F(x,y) = \int_0^1 \vec{f}(tx, ty) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j})\, dt \;=\; (*)$$

(uso la parametrizzazione $\gamma(t) = tx\,\vec{i} + ty\,\vec{j}$
$\gamma'(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$)

$$(*) = \boxed{x \int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + y \int_0^2 f_2(tx,ty)\,dt} = F(x,y)$$

DICO CHE F è un potenziale per f, cioè

$$\frac{\partial}{\partial x} F = f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial y} F = f_2$$

Facciamo la prima. Posso derivare sotto il segno di integrale ($\vec{f}$ è C^1)

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + x \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f_1(tx,ty) \cdot t\,dt$$

$$+ y \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f_2(tx,ty)\, t\,dt =$$

$$\int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + \underbrace{x \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f_1(tx,ty) \cdot t\,dx + y \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f_1(tx,ty) \cdot t\,dy}_{} =$$

$$\int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} f_1(tx,ty)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\cancel{\int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt} + \underbrace{\Big[t\, f_1(tx,ty)\Big]_0^1}_{f_1(x,y)} - \cancel{\int_0^1 f_1(tx,ty)\,dt} =$$

Analogamente $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$

DUNQUE SE $\vec{f}$ È IRROTAZIONALE ED È DEFINITO SU TUTTO IL PIANO $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f è conservativo.

Se guardo la dimostrazione mi accorgo che HO USATO SOLO LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

[$\exists\, P_0 \in \Omega$ tale che $\forall P \in \Omega$ il segmento tra P_0 e P giace tutto in Ω] (S)

Se vale (S) posso definire $F(P) = \int_{P_0}^{P} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ e

sul segmento

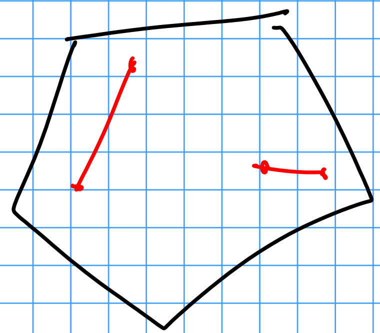
ripeto la stessa dim. $\Rightarrow$ $\nabla F = \vec{f}$ ($\vec{f}$ è conservativo)

Def. Se vale (S) dico che "Ω è stellato"

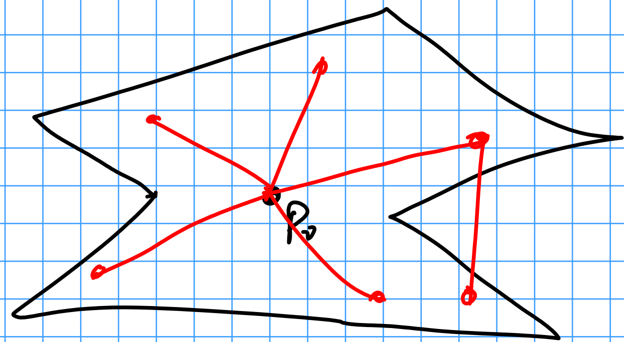
TEOREMA Se Ω è stellato e $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE IN Ω

ALLORA $\vec{f}$ è <u>conservativo</u>.

<u>NOTA</u> Se Ω è convesso $\Rightarrow$ Ω è stellato



convesso



STELLATO (NON CONVESSO)

- IN REALTÀ CI SONO CONDIZIONI PIÙ GENERALI ....
- NATURALMENTE IL FATTO CHE L'APERTO Ω non sia stellato non impedisce che ci siano campi conservativi in Ω

<u>ESEMPIO</u> Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ posso considerare

$$\vec{f}(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

VEDIAMO SE È CONSERVATIVO. CERCO F t.c.

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}$ (b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}$

(a) $\longrightarrow$ $F(x,y) = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^2} =$ $s = x^2+y^2$

$ds = 2x\,dx$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{2s} + c = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2} + c(y)$

IMPONGO LA (b)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-1}{2(x^2+y^2)} + c(y)\right) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}\\ \qquad\qquad \| \\ \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2} + c'(y)\end{array}\right\} \iff c(y) = \text{costante}$$

TORNA $F(x,y) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} + \text{costante}$