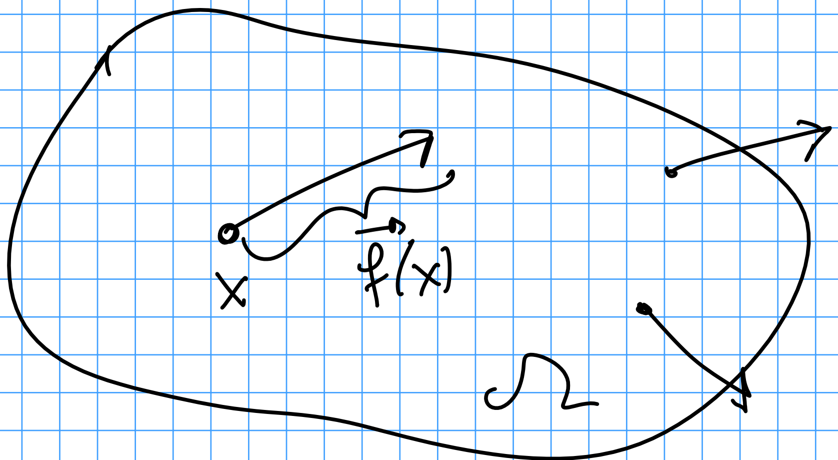
Analisi Matematica II
Lezione 50
11 aprile 2016

CAMPI DI VETTORI

<u>Campo</u>: $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (tipicamente $N=2$, $N=3$)

$\vec{f}$ può essere continuo / derivabile . . .

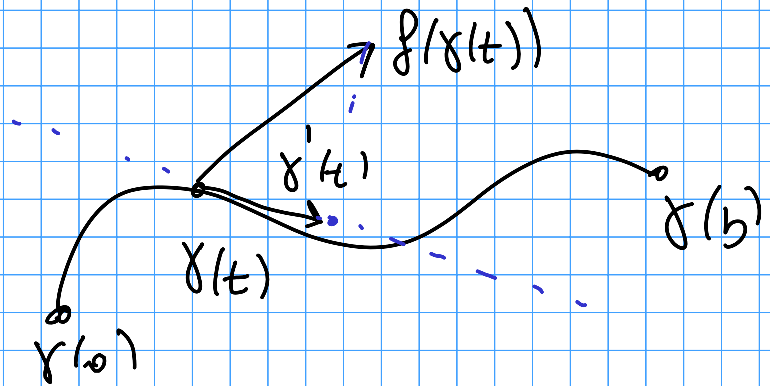


Def. Data una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ REGOLARE e un campo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, chiamo integrale (curvilineo) di $\vec{f}$ lungo γ:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

PRODOTTO SCALARE

(ricorda che avevamo definito $\int_\gamma g\, ds = \int_a^b g(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$ quando $g : \Omega \to \mathbb{R}$)



Per esempio – se $\vec{f}$ è una forza – $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ è il LAVORO di $\vec{f}$ lungo la curva

• PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI

$$\int_\gamma \left(c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2\right) d\vec{s} = c_1\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} + c_2\int_\gamma \vec{f}_2 \cdot d\vec{s}$$ (LINEARITÀ)

(ψ strett. crescente)

Se $\psi : [c, d] \to [a, b]$ $\exists\, \psi'$ continua $\neq 0$, se $\underline{\psi(c) = a,\ \psi(d) = b}$

$\gamma : [a, b] \to \Omega$ curva regolare

se $\gamma_1 : [c, d] \to \Omega$ è definita da $\gamma_1(s) = \gamma(\psi(s))$

Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ALLORA

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

(INDIPENDENZA DA RIPARAMETRIZZAZIONI CON LO STESSO VERSO)

SE INVECE $\psi(c) = b$ $\psi(d) = a$ (ψ strett. decrescente)

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

__DIM.__ (Basta applicare la definizione).

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_c^d \vec{f}(\gamma_1(s)) \cdot \gamma_1'(s)\, ds = (*)$$

MA $\vec{\gamma}_1'(s) = \frac{d}{ds}\vec{\gamma}(\psi(s)) = \vec{\gamma}'(\psi(s))\,\psi'(s) \Rightarrow$

$$(*) = \int_c^d \vec{f}(\gamma(\psi(s))) \cdot \vec{\gamma}'(\psi(s))\, \psi'(s)\, ds =$$

(CAMBIO DI VARIABILE $t = \psi(s)$ da cui $dt = \psi'(s)\,ds$)

$$\int_{\psi(c)}^{\psi(d)} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = \begin{cases} \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt & \text{se } \psi' > 0 \\ \int_b^a \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt & \text{se } \psi' < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \psi' > 0 \\ -\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \psi' < 0 \end{cases}$$

TESI

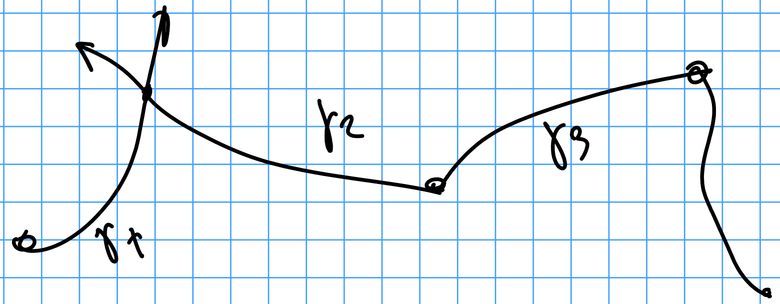
L'INTEGRALE "DI SECONDO TIPO" DIPENDE DAL VERSO

DEF. ESTESA Se γ è regolare a tratti, cioè se

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k \quad \text{con}$$

γ_i regolare $\quad i = 1 \dots K$

$\left[\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N \right.$
CONTINUA
$\exists\ t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$, $\ t_0 = a$
t.c. γ ristretta a $[t_i, t_{i+1}]$
è regolare $\left.\right]$



definisco $$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{K} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(si può dim. che questa def. <u>non dipende</u> dal modo in cui rappresento γ come somma di $\gamma_1 \dots \gamma_K$.)

ALLORA VALE "L'ADDITIVITÀ RISPETTO A γ"

- se γ_1 e γ_2 sono consecutive $(\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2))$
  (ESTREMO DX di γ_1 = ESTREMO SX di γ_2)

$\Rightarrow$ HA SENSO $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ e
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = (x+y)\,\vec{i} + (x-y)\,\vec{j}$$

γ = un giro della circonferenza di raggio 1 in verso antiorario.

UNA PARAMETRIZZAZIONE È $\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$

ALLORA $\vec{\gamma}'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\left[(\cos(t) + \sin(t))\,\vec{i} + (\cos(t) - \sin(t))\,\vec{j} \right]}_{\vec{f}(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\left[-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} \right]}_{\vec{\gamma}'(t)} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-\sin(t)(\cos(t) + \sin(t)) + \cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) \right] dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) \right] dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin(2t) + \cos(2t)\right) dt = \left[\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$\#$

CAMPI CONSERVATIVI

Def. Sia $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo continuo.
Dico che $\vec{f}$ è CONSERVATIVO se esiste una funzione (scalare) $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\vec{f} = \nabla F$.
Tale F si dice POTENZIALE per $\vec{f}$.

(IN $N=1$ tutti i campi sono conservativi per il teor. fondamentale del calcolo integrale).

Se $N > 1$ CI SONO CAMPI NON CONSERVATIVI

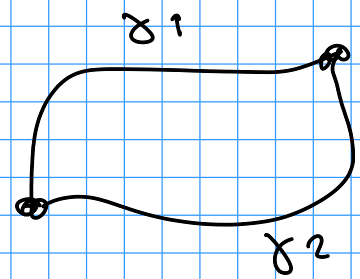
IPOTESI: Ω CONNESSO: (dati P_1 e P_2 in Ω, TROVO γ in Ω che li congiunge)

TEOREMA (caratterizzazione dei campi conservativi)
Dato un campo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ SONO EQUIVALENTI:

(a) $\vec{f}$ è conservativo

(b) Per ogni γ_1 e γ_2 curve regolari a tratti in Ω $(\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$

$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2))$



SI HA $$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(L'INT. "DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI": Dati $P_1, P_2 \in \Omega$ su qualunque γ che congiunge P_1 e P_2 l'integrale è lo stesso).

(c) Per ogni γ regolare a tratti e chiusa

$(\gamma(b) = \gamma(a))$ $$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

INOLTRE, (d) se $\vec{f}$ è conservativo, ogni potenziale F per $\vec{f}$ ha la forma

$$F(P) = F(P_0) + \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove P_0 è un punto (prefissato) di Ω e γ è una qualunque curva che congiunge P_0 a P.

IN PARTICOLARE, se F_1 e F_2 sono potenziali per $\vec{f}$

$\Rightarrow \quad F_1 = F_2 + \text{costante}$.

<u>DIM.</u> (a) $\Rightarrow$ (b)

Sia F tale che $\vec{f} = \nabla F$

Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva regolare

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

HO DIMOSTRATO CHE, SE γ CONGIUNGE P_0 a P

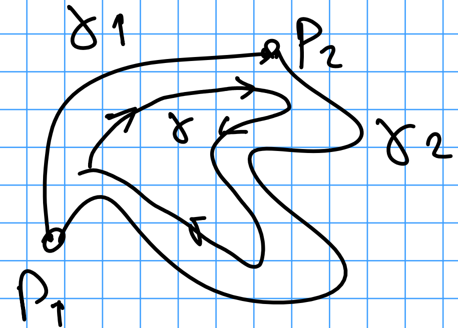
$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} = F(P) - F(P_0)$$

Questo dimostra la (b) e dice anche che vale la formula in (d) #

(b) + (d) $\Rightarrow$ (c) OVVIO

(c) $\Rightarrow$ (b)

PRENDIAMO DUE PUNTI P_1 e P_2. Prendiamo γ_1 e γ_2 che congiungono P_1 e P_2



Ricordiamo che $-\gamma_2$ indica la curva γ_2 percorsa in verso opposto e

Poniamo $\gamma := \gamma_1 - \gamma_2 \; (\gamma_1 + (-\gamma_2))$. γ è ben definita ed è chiusa. $\Rightarrow$ per la (c) ho

$$0 = \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{-\gamma_2} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\, d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) + (d)

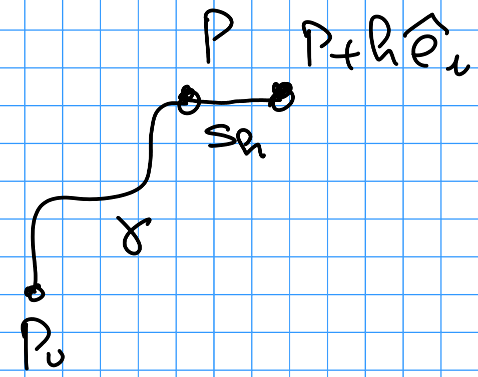
Supponiamo dunque che $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s}$ dipenda solo dagli estremi. Sia P_0 un punto (o caso) di Ω.

POSSO DEFINIRE $F(P) := \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s}$ dove γ è una (qualunque) curva regolare a tratti che congiunge P_0 e P.

Se dimostro che $\nabla F = \vec{f}$ ho FINITO.

Per questo prendo un $P \in \Omega$ e un versore $\hat{e}_i$

$i = 1 \dots N$. Soluzione

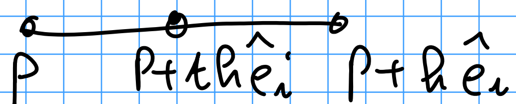


$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = \lim_{h \to 0} \frac{F\left(P + h\vec{e_i}\right) - F(P)}{h}$$

Sia γ una curva che congiunge P_0 e P

$$\left(\Rightarrow \quad F(P) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \right).$$

Consideriamo $s_h : [0,1] \to 1$ il segmento che congiunge P e $P + h\hat{e}_i$ ($s_h(t) = P + t h \hat{e}_i$, $0 \le t \le 1$



)

$\gamma_h = \gamma + s_h$ è una curva che congiunge P_0 e $P + h\hat{e}_i$

$$\Rightarrow \quad F(P + h\hat{e}_i) = \int_{\gamma_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{F(P)} + \int_{s_h} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{F(P + h\hat{e}_i) - F(P)}{h} = \frac{1}{h} \int_{s_h} \vec{f} \cdot ds =$$

$$\frac{1}{\cancel{h}}\int_0^1 \vec{f}(\underbrace{P+th\hat{e}_i}_{s_h(t)})\cdot(\underbrace{\cancel{h}\hat{e}_i}_{s_h'(t)})\,dt = \int_0^1 f_i(P+th\hat{e}_i)\,dt$$

dove fa tendere h a zero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\int_0^1 \vec{f}_i(P+th\hat{e}_i)\,dt = (\,??\,)$$

$$\int_0^1 \lim_{h\to 0} f_i(P+th\hat{e}_i)\,dt = \int_0^1 f_i(P)\,dt = f_i(P)$$

se ripeto per ogni $i=1..n$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla F = \vec{f}\,.}$

Il passaggio $(??)$ è lecito (abbiamo visto dei teoremi di passaggio al limite sotto segno di int. $\psi(h)=\int_a^b \phi(h,t)\,dt$ QUANDO $\phi(h,t)$ è continuo in (h,t)

Nel nostro caso $\phi(h,t) = f_i(P+th\hat{e}_i)$ che è continuo in (h,t).

DUNQUE ABBIAMO DIMOSTRATO LA TESI

ESEMPIO DI CAMPO NON CONSERVATIVO

$$\vec{f}(x,y) = (x+2y)\,\vec{i} + (3x-y)\,\vec{j} \qquad \boxed{0 \le t \le 2\pi}$$

Prendiamo di nuovo $\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$ (CHIUSA)

e calcoliamo $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} =$

$$\int_0^{2\pi} \left[(\cos(t) + 2\sin(t))\,\vec{i} + (3\cos(t) - \sin(t))\,\vec{j} \right] \cdot \left[-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} \right] dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-\sin(t)\,(\cos(t) + 2\sin(t)) + \cos(t)\,(3\cos t - \sin(t)) \right] dt \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-2\sin(t)\cos(t) - 2\sin^2(t) + 3\cos^2(t) \right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-\sin(2t) - 2\,\frac{1-\cos(2t)}{2} + 3\,\frac{1+\cos(2t)}{2} \right] dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin(2t) + \frac{5}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} \right) dt = \frac{2\pi}{2} \neq 0$$

INTEGRALE NULLO

<u>INVECE</u> nel primo esempio l'integrale viene zero

PERCHÉ $\vec{f}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ è CONSERVATIVO

CERCHIAMO INFATTI UN POTENZIALE $F(x,y)$. DEVE ESSERE

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x+y$ (b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x-y$

(a) $\Rightarrow$ $F(x,y) = \int (x+y)\,dx$ ($c(y)$ = FUNZIONE DELLA SOLA y)

$= \dfrac{x^2}{2} + xy + c(y)$

IMPONIAMO CHE VALGA (b)

$$x-y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+xy+c(y)\right) = x + c'(y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad c'(y) = -y \quad \Longleftrightarrow \quad c(y) = -\frac{y^2}{2} + \text{costante}$$

DUNQUE SONO RIUSCITO A TROVARE

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

tale che $\nabla F = \vec{f}$!!

ESEMPIO

$$y\, e^{xy}\, \vec{i} + x\, e^{xy}\, \vec{j} = \vec{f}(x,y)$$

$\vec{f}$ è conservativo ?? PROVIAMO A CERCARE UN POTENZIALE F. Deve essere

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y e^{xy}$ (b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x e^{xy}$

La (a) impone $F(x,y) = \int y e^{xy}\, dx =$ $xy = z$ $dz = y\,dx$

$$= \int e^{z}\, dz = e^{z} + c(y) = e^{xy} + c(y)$$

Metto quanto dovuto in (b) $\Rightarrow$

$$\cancel{x e^{xy}} = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} + c(y)\right) = \cancel{x e^{xy}} + c'(y) \Leftrightarrow$$

$c' = 0 \Rightarrow c =$ costante. IN DEFINITIVA

$F(x,y) = e^{xy} + c$ è un potenziale per $\vec{f}$.