Analisi Matematica II
Lezione 48
5 aprile 2016

Eq. delle onde (corda vibrante - di D'Alembert)

(EQ) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(+ f(x,t) \right) \qquad 0 < x < L \qquad t \in \mathbb{R}$$

+ condizione al bordo $\quad u(t,0) = u(t,L) = 0$

+ condizioni iniziali $\quad u(0,x) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x)$

METODO DI "SEPARAZIONE DELLE VARIABILI"

CERCO LE SOL. DI (EQ) della forma $u(t,x) = v(t)w(x)$

$$\Rightarrow \quad v''(t)\,w(x) = c^2\, v(t)\, w''(x)$$

$$\frac{v''(t)}{v(t)} \frac{1}{c^2} = \frac{w''(x)}{w(x)} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left]0, L\right[$$

$\Rightarrow \quad \frac{v''(t)}{v(t)} \frac{1}{c^2} = \frac{w''(x)}{w(x)} = K$ costante

$\Rightarrow$ DUE EQUAZIONI SEPARATE

(1) $\quad w''(x) = K\, w(x) \qquad 0 \le x \le L \qquad w(0) = w(L) = 0$

(2) $\quad v''(t) = K c^2 v(t) \qquad t \in \mathbb{R}$

Se in (1) moltiplico per $w(x)$ e integro tra 0 e L $\Rightarrow$

$$\int_0^L w''(x) w(x)\, dx = K \int w^2(x)\, dx$$

|| (per parti)

$$\underbrace{\Big[w'(x)\, w(x) \Big]_0^L}_{=0 \text{ perché } w(0)=w(L)=0} - \int_0^L w'(x)^2\, dx$$

DUNQUE

$$K \int_0^L w(x)^2\, dx = - \int_0^L w'(x)^2\, dx \Rightarrow \boxed{K < 0}$$

Scrivo $K = -h^2$. L'eq (1) diventa

$$w'' + k^2 w = 0 \iff w(x) = A \sin(kx + \theta)$$

se uso di nuovo le cond. al bordo

$$A \sin\theta = 0 \qquad A \sin(kL + \theta) = 0$$

$\Rightarrow \theta = 0$ $\qquad \sin(kL) = 0 \iff kL = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$

DUNQUE $\boxed{k = n\frac{\pi}{L}}$ e $\boxed{w(x) = A \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}$

se $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$ $\qquad k = n\omega_0$ con $n \in \mathbb{N}$ $\qquad w(x) = A \sin(n\omega_0 x)$

<u>RISOLVO (2)</u>

$$v''(t) + c^2 n^2 \omega_0^2 v = 0$$

da cui $\qquad v(t) = B \cos(cn\omega_0 t + \theta)$

e alla fine $\boxed{u(t,x) = K \cos(cn\omega_0 t + \theta) \sin(n\omega_0 x)}$

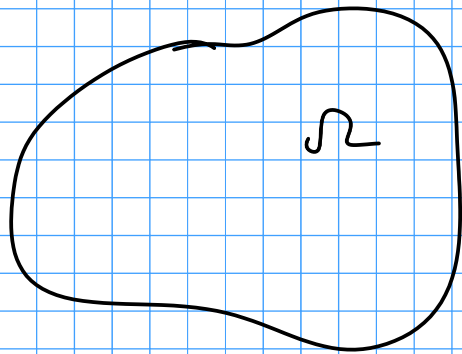
Famiglia di sol. dell'equazione al variare di $n \in \mathbb{N}$ (K, θ)

CONGETTURA: una soluzione generica del problema è una serie di soluzioni di questo tipo

QUESTO È EFFETTIVAMENTE VERO COME ABBIAMO VISTO USANDO I TEOREMI SULLE SERIE DI FOURIER.

VEDIAMO UN ESEMPIO IN DUE VARIABILI : EQ. DELLA MEMBRANA ELASTICA

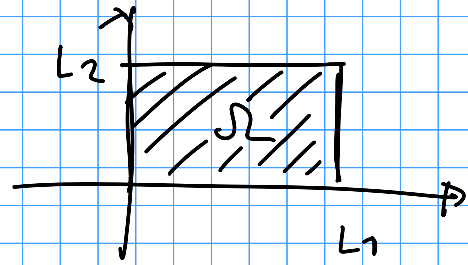
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ DOMINIO REGOLARE



HO IL SEGUENTE PROBLEMA

$$
(P)\begin{cases}
u(t,x,y) \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (x,y) \in \Omega \\[4pt]
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\Delta u \text{ (operatore di Laplace)}} \quad \left(+ f(t,x,y) \right) \qquad (EQ) \\[4pt]
+ \text{ cond. al contorno} \qquad u(t,x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \in \partial\Omega \\[4pt]
+ \text{ cond. iniziali} \qquad u(0,x,y) = u_0(x,y) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = v_0(x,y)
\end{cases}
$$

CASO DELLA MEMBRANA RETTANGOLARE



$$\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$$

Le cond. al bordo VALE

IDEA: CERCO $\boxed{u(t,x,y) = \sum_{n,m} b_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)}$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L_1} \qquad \omega_2 = \frac{\pi}{L_2}$$

("serie di Fourier di serie 'doppia'")

Si vede che $b_{n,m}(t) = \frac{2}{L_1}\frac{2}{L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L} u(t,x,y)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)\,dx\,dy$

"Se tutto funziona"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n,m} b'_{n,m}(t)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n,m} b''_{n,m}(t)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n\,m} b_{n,m}(t)\, n^2\omega_1^2 \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_{n\,m} b_{n\,m}(t)\, m^2\omega_2^2 \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

Se impongo l'EQ. $(f=0)$

$$\sum_{n\,m}\left(b''_{nm}(t)+b_{nm}(t)\left(n^2\omega_1^2+m^2\omega_2^2\right)\right)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)=0$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$ b l'EQ.

$$b''(t)+\left(n^2\omega_1^2+m^2\omega_2^2\right)b(t)=0$$

$$\boxed{b_{n,m}(t)=A_{n,m}\cos\Big(\underbrace{\sqrt{n^2\omega_1^2+m^2\omega_2^2}}_{\omega_{n,m}}\,t+\theta_{nm}\Big)}\qquad (*)$$

θ_{nm} e $A_{n,m}$ si ricavano dalle condizioni iniziali u_0 e v_0

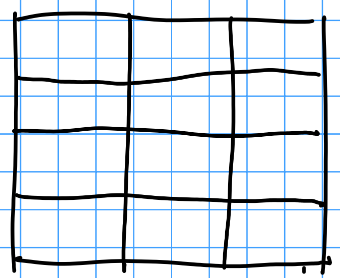
perché

$$\begin{cases} b_{n,m}(0)=A_{n,m}\cos(\theta_{n,m}) \\ b_{n,m}'(0)=A_{nm}\,\omega_{nm}\sin(\theta_{nm})\end{cases}\qquad \dots$$

Alla fine si dimostra che tutto "sta in piedi" e si riesce a scrivere $u(t,x,y)$ come serie

Gli $\omega_{n,m} = \sqrt{n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2}$ SONO LE "FREQUENZE FONDAMENTALI" DEL TAMBURO RETTANGOLARE

Per esempio $L_1 = L_2 = \pi$ $\quad n = 3 \quad m = 4$



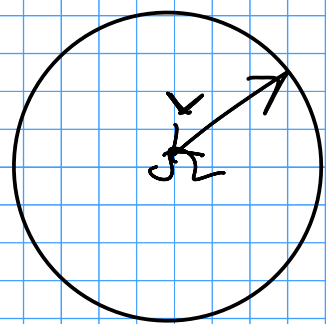
$$\omega_{3,2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$u_{3,2}(t,x,y) = A\cos(5t + \theta)\sin(3x)\sin(4y)$$

(ho perso c: mettiamo $c = 1$)

MEMBRANA CIRCOLARE

$$\Omega = B(0,L) = B$$



$\underline{I^a}$ IDEA: SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$u(t,x,y) = v(t)\, w(x,y)$$

Ragiono come prima (rimetto il c !)

$$v''(t)\, w(x,y) = c^2\, v(t)\, \Delta w(x,y)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x,y)}{w(x,y)} \implies \text{entrambi eguali a una costante } K$$

(1) $\Delta w = K\, w \quad + \quad w(x,y)=0$ su ∂B

(2) $v''(t) = c^2 K\, v(t)$

II° <u>IDEA</u> Passo in coordinate polari

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

$$\hat{w}(\rho,\theta) = w(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

cerco l'equazione verificata da $\hat{w}$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \rho^2} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin^2\theta\right]$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} = +\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\sin^2\theta - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\sin\theta\cos\theta$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta\sin\theta$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos^2\theta - \frac{\partial w}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta$$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} = \rho^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(- -)\right)$$

(il resto si elide ...) $= \rho^2 \Delta w(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) =$

L'equazione (1) diventa

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} = k\,\hat{w} \qquad \rho \in [0,R) \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

III° IDEA $\hat{w}(\rho,\theta) = R(\rho)\,S(\theta) \Rightarrow$

$$(1'') \quad \left(R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\right)S(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\,S''(\theta) = k\,R(\rho)S(\theta)$$

DIVIDO PER $\frac{R(\rho)S(\theta)}{\rho^2}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{S''(\theta)}{S(\theta)} = k\rho^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{\rho^2\left(R'' + \frac{1}{\rho}R' - kR\right)}{R}}_{\text{FUNZIONE DI } \rho} + \underbrace{\frac{S''}{S}}_{\text{FUNZIONE DI } S} = 0$$

NE SEGUONO DUE EQ. DISTINTE $\exists\, h \in \mathbb{R}$

$$(1.1) \quad \rho^2 R'' + \rho R' - \rho^2 kR = hR$$

$$(1.2) \quad S'' = -hS$$

DATO CHE $S(\theta)$ è 2π PERIODICA $\Rightarrow$ $h = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$

$$S(\theta) = A\cos(m\theta + \theta_0)$$

<u>QUINDI</u> $h = m^2$. TORNIAMO A (1.1)

(B) $$\rho^2 R'' + \rho R' - (k\rho^2 + m^2) R = 0$$

[DIAMO PER BUONO CHE $k < 0$ — LO SI PUÒ DIMOSTRARE GIÀ NELL'EQ. (1)

$$\Delta w = k w$$]

Quindi (B) diventa ($k = -h^2$)

(B) $$\rho^2 R'' + \rho R' + (h^2\rho^2 - n^2) R = 0$$

Poniamo $\boxed{h\rho = \sigma}$. $\tilde{R}(\sigma) = R(\rho)$, cioè

$$R(\rho) = \tilde{R}(h\rho) \Rightarrow R'(\rho) = h\tilde{R}'(\sigma)$$
$$R''(\rho) = h^2 \tilde{R}''(\sigma)$$

L'eq. diventa

$$\underbrace{\rho^2 k^2}_{\sigma^2} \tilde{R}''(\sigma) + \underbrace{\rho k}_{\sigma} \tilde{R}'(\sigma) + (k^2 \rho^2 - n^2)\tilde{R}(\sigma) = 0$$

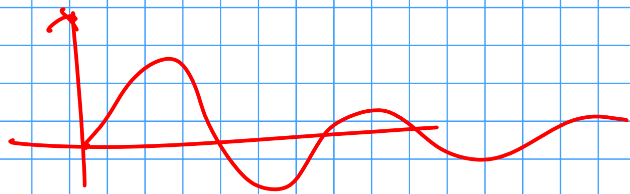
$$\underbrace{\sigma^2 \tilde{R}'' + \sigma \tilde{R}' + (\sigma^2 - n^2)\tilde{R} = 0}_{\text{EQ. DI BESSEL DI ORDINE } n}$$

Sappiamo che

$\tilde{R}(\sigma) = A\, J_m(\sigma)$ + CONDIZIONE $R(L) = 0$

cioè $\tilde{R}(kL) = 0$ cioè

$$\boxed{J_m(kL) = 0}$$



DUNQUE kL = UNO DEGLI ZERI DI J_m

QUINDI HO UNA SUCCESSIONE A DUE INDICI

$k_{m,m}$ = m-ESIMO ZERO DI $J_m(z)$

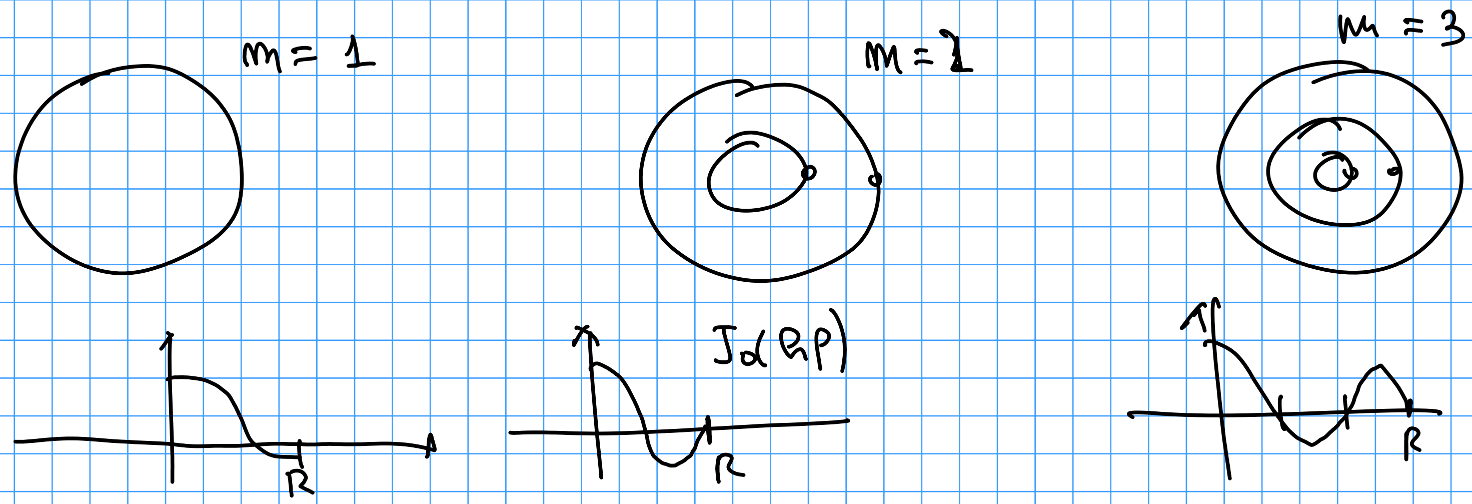
METTENDO TUTTO INSIEME

$$\hat{u}(t,\rho,\theta) = \underbrace{A_{nm}\cos(c\,k_{nm}\,t+\theta_{nm})}_{v(t)}\cos(m\theta)\,J_m(k_{nm}\,\rho)$$

Per esempio

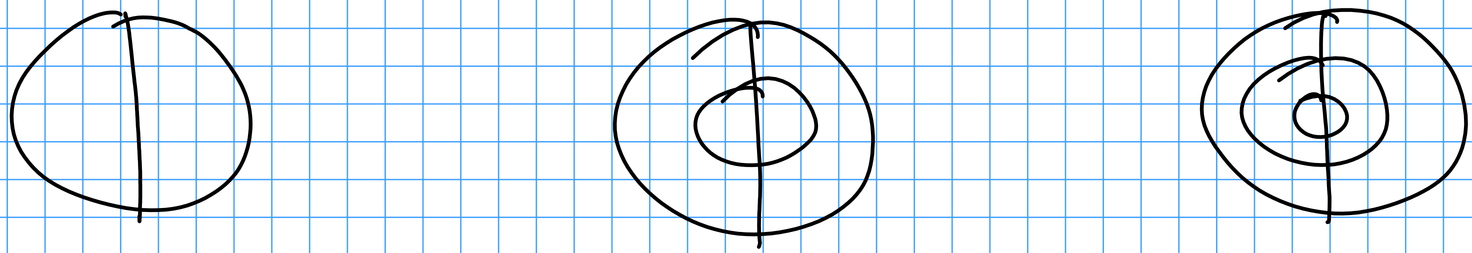
$\boxed{m=0}$ HO GLI ZERI DI J_0

$u(t,\rho,\theta)$ NON DIPENDE DA θ

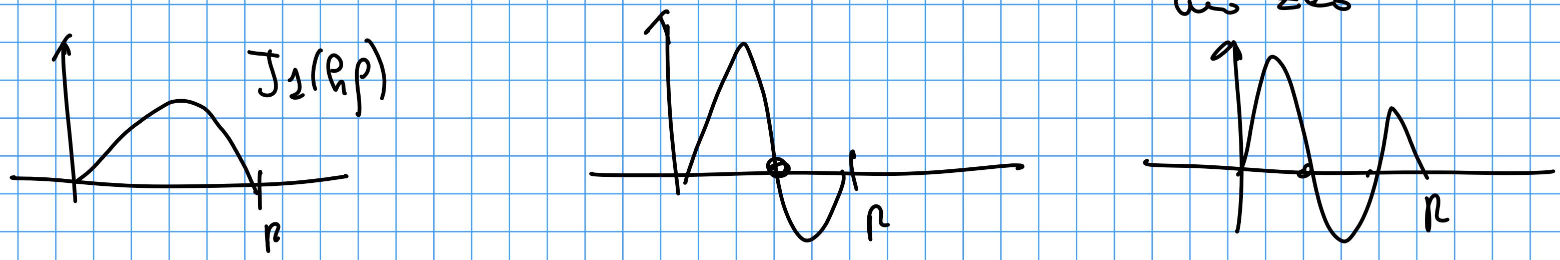


$\boxed{m=1}$ La parte angolare è $\cos(\theta)$ +

(cambio segno 1 volta



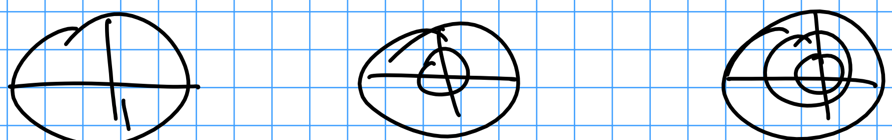
La parte radiale è $J_1(k_n \rho)$ (in modo che $k_n R$ vada in uno zero



$\boxed{m=2}$ la parte in θ diventa $\cos(2\theta)$

la parte radiale è $J_2(k_n \rho)$ con k_n tale che

$k_n R$ sia uno zero di J_2 . .



. . .

A TUTTO QUESTO SI AGGIUNGE IL COMPORTAMENTO IN t che è sempre determinato da $\rho_{n,m}$

→ LE "ARMONICHE" DEL TAMBURO CIRCOLARE SONO $\rho_{n,m}$ = m-ESIMO ZERO DELLA n-ESIMA FUNZIONE DI BESSEL

Si può dimostrare che una generica soluzione dell'eq. nel caso di $\Omega = B(0,L)$ è una serie di queste soluzioni elementari