Analisi Matematica II
Lezione 47
4 aprile 2016

Ricordiamo che, se f ha "energia finita" cioè

$$\int_0^T |f(t)|^2\, dt < +\infty$$

allora sono definiti i coeff. di Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\omega n t}\, dt$$

$$\left(a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \right.$$

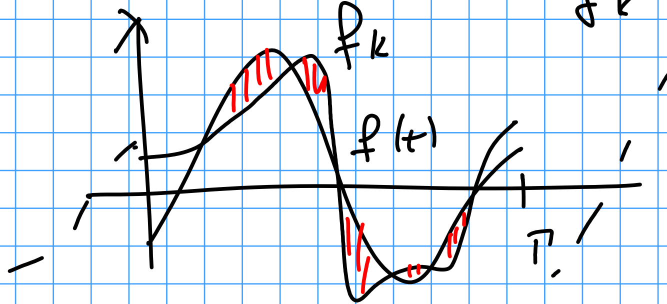
$$\left. a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \right)$$

e si ha: $f(t)$ è "somma in energia" della serie di Fourier

$$f \underset{2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

cioè:

$$\int_0^T \Big| f(t) - \underbrace{\sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega t}}_{f_K} \Big|^2 dt \xrightarrow{K \to +\infty} 0$$



La parte rossa $\to 0$ se $K \to \infty$

L'approccio mediante l'energia è quello più notevole.

Continuando: si ha

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$\left(T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

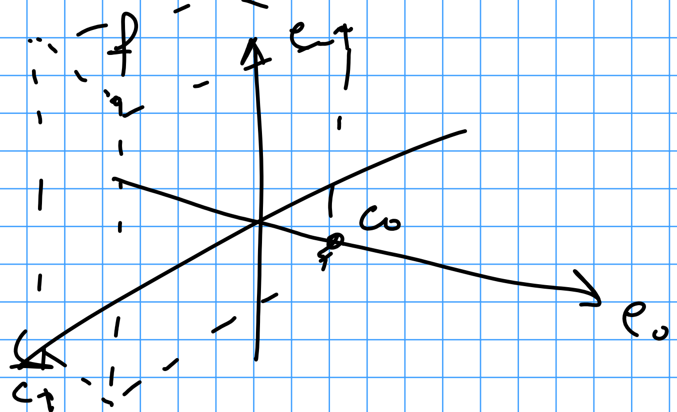
EGUAGLIANZA DI PARCEVAL

I c_n sono le "COORDINATE" di f nella "base"

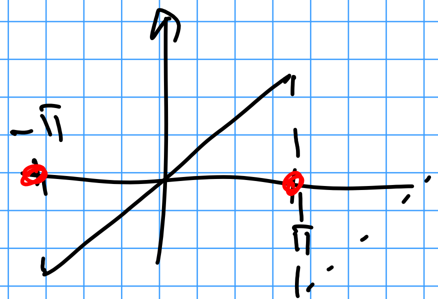
$e_n = e^{in\omega t}$

ORTOGONALI

$\langle e_i, e_j \rangle = \int_0^T e_i \bar{e}_j \, dt = 0$



ESEMPIO Rifacciamo lo sviluppo del dente di sega



$T = 2\pi \qquad \omega = 1$

$f(t) = t \quad$ se $\quad -\pi < t < \pi$

Cerco lo sviluppo complesso:

$$\boxed{n \neq 0} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[t \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, dt}_{=0} = \frac{i}{2n\pi}\left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}\right)$$

$$= \frac{i}{2n}\left((-1)^n + (-1)^n\right) = \frac{(-1)^n i}{n}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0$$

I TEOREMI VISTI CI DICONO:

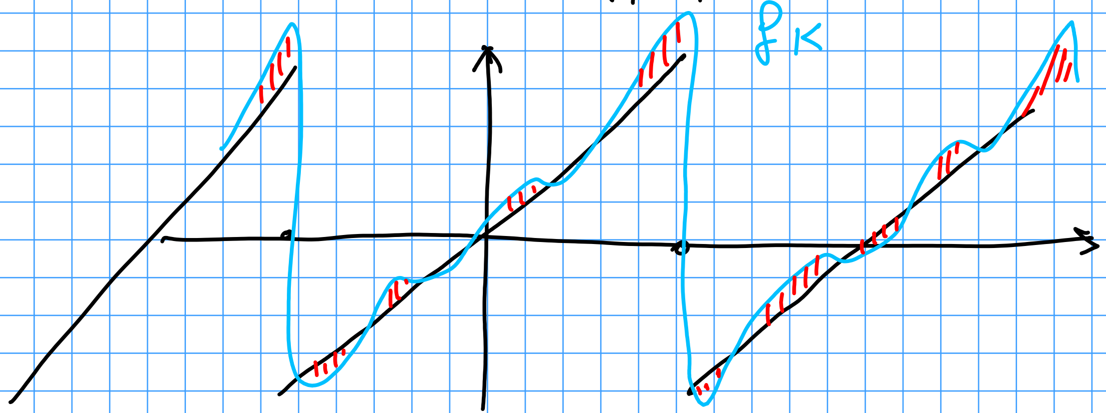
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{int}$$ (CONVERGENZA PUNTUALE)

(SE CONVENIAMO $f(-\pi) = f(\pi) = 0$)

INOLTRE

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \overbrace{\sum_{n=-K}^{K} \frac{i}{n}(-1)^n e^{int}}^{f_K} \right|^2 dt = 0$$

SI PUÒ FARE LA VERSIONE REALE



APPLICHIAMO PARCEVAL.

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2 = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n i}{n} \right|^2 = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 4\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$(c_0 = 0)$

$$\parallel$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

(GIÀ VISTO VARIE VOLTE)

CONTINUANDO: C'È UN VICEVERSA:

SE $(c_n)_n$ è una successione in $\mathbb{C}$ tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty \Rightarrow \text{ esiste una funzione } f$$

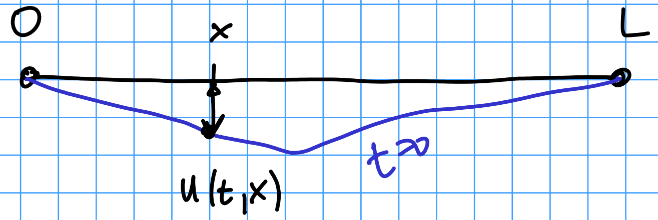
con
$$\int_0^T |f(t)|^2 \, dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

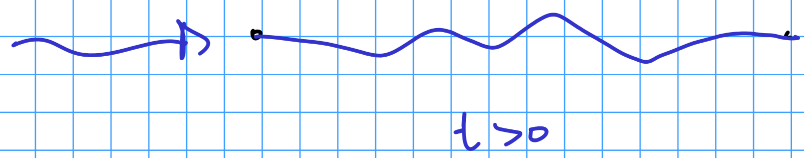
tale che
$$\lim_{K\to\infty} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega t} \right|^2 dt = 0$$

e $\quad c_n = \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}$

APPLICAZIONE ALL' "EQUAZIONE DELLE ONDE"

CASO DELLA "CORDA VIBRANTE FISSATA AGLI ESTREMI"





INDICO CON $u(t,x)$ = POSIZIONE DELLA CORDA ALL'ISTANTE $t \in \mathbb{R}$ NEL PUNTO $x \in [0,L]$

FATTO (non lo dimostro). Vale l'equazione di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

eventuale forza agente sulla corda

PRENDO $f = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EQ. ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARE, OMOGENEA

È naturale imporre delle condizioni iniziali

(I) CONDIZIONE AL BORDO : $u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t$

(II) CONDIZIONI INIZIALI ~ tipo Cauchy ~

$u(x,0) = u_0(x)$

$\frac{\partial}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$

u_0 e v_0 funzioni assegnate (POSIZIONE E VELOCITÀ in $t=0$)

qui ci vorrebbe un coeff c^2

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(+ f(x,t)\right) & \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]0,L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & \forall x \in]0,L[\end{cases}$$

$f(x,t)$ è dato (TERMINE FORZANTE)

IDEA: CERCO $u(t,x)$ COME SOMMA DI UNA SERIE DI FOUR. IN x - SERIE DI SENI

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n \omega_0 x)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L}$$

Per t fissato sviluppo $u(t,x)$ in serie di soli seni rispetto a x

(Dunque deve essere $b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(t,x) \sin(n \omega_0 x)\, dx$)

AMMETTIAMO CHE u esiste e che valga lo sviluppo sopra

PONIAMO $f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(t,x) \sin(n \omega_0 x)\, dx$

(i coeff. del termine forzante) NOTI

"Se tutto funziona"

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(n \omega_0 x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t)\, m\omega_0 \cos(m\omega_0 x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = -\sum_{m=1}^{\infty} b_n(t)\, m^2\omega_0^2 \sin(m\omega_0 x)$$

IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big(\underset{C^2}{b_n''(t)} + m^2\omega_0^2 b_n(t) - f_m(t) \Big) \sin(m\omega_0 x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall m \geq 1 \qquad \underbrace{b_m''(t) + m^2\omega_0^2 b_m(t) = f_m(t)}_{\text{ED. DIFF. ORDINARIA SUI } b_n} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

PER CONTINUARE METTO $f = 0$, $f_m = 0 \quad \forall n$

IN QUESTO CASO $b_m'' + m^2\omega_0^2 b = 0$

$$\Rightarrow \boxed{b_m(t) = A_n \cos(m\omega_0 t) + B_n \sin(m\omega_0 t)}$$

$$(b_n'(t) = -n\omega_0 A_n \sin(m\omega_0 t) + m\omega_0 B_n \cos(m\omega_0 t)$$

$$A_n = b_n(0) \qquad B_n = \frac{b_n'(0)}{n\omega_0}$$

MA SE USO LE COND INIZIALI TIPO CAUCHY:

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(n\omega_0 x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 x)$$

$$v_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0) \sin(n\omega_0 x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 B_n \sin(n\omega_0 x)$$

DUNQUE $A_n =$ (coeff. di F. della u_0) $= \boxed{\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx}$

$$n\omega_0 B_n = (\text{coeff di } v_0 \ldots) = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(n\omega_0 x)$$

$$B_n = \boxed{\frac{2}{n\omega_0 L}\int_0^L v_0(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx}$$

IN QUESTO MODO HO TROVATO UNA $u(x,t)$ data mediante una serie di seni.

SI PUÒ VERIFICARE CHE: (qualche ipotesi su u_0 e v_0)

- EFFETTIVAMENTE SI PUÒ DERIVARE PER SERIE E QUINDI $u(t,x)$ verifica l'equazione delle corde
- PER LO STESSO MOTIVO $u(0,x)=u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=v_0$
- Dato che la serie è fatta di seni $\Rightarrow u(t,0)=0$
  $u(t,L)=0$

HO TROVATO LA SOLUZIONE (espressa mediante una serie)

VEDIAMO PIÙ IN DETTAGLIO COSA ABBIAMO TROVATO:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(n\omega_0 x) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\overset{c}{\downarrow}\omega_0 t) + B_n\sin(n\overset{c}{\downarrow}\omega_0 t)\right)\sin(n\omega_0 x) =$$

TENIAMO CONTO DI C (FORMULE DI PROSTAFERESI)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}\sin\left(n\omega_0(x+ct)\right) - \frac{B_n}{2}\cos\left(n\omega_0(x+ct)\right)}_{\text{FUNZIONE DI } x+ct} +$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \sin\left(n\omega_0 (x-ct)\right) + \frac{B_n}{2} \cos\left(n\omega_0 (x-ct)\right)}_{\text{FUNZIONE DI } x-ct}$$

$$= u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

Se metto $t=0$

se derivo in t e metto $t=0$ $\Rightarrow \begin{cases} u_0(x) = u_1(x) + u_2(x) \\ v_0(x) = c\,u_1(x) - c\,u_2(x) \end{cases}$

$$\boxed{u_1(x) = \frac{v_0(x) + c\,u_0(x)}{2} \qquad u_2(x) = \frac{c\,u_0 - v_0(x)}{2}}$$

$u(t,x)$ è somma di due pezzi

$u_1(x+ct)$ $\leftarrow$ TRANSL.A VERSO SX con velocità c

$u_2(x-ct)$ $\leftarrow$ " " " DX con velocità c

ALTRO APPROCCIO (della i- modo dualistico)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

CERCO $u(t,x) = v(t)\, w(x)$ $\Longrightarrow$ IMPONGO L'EQ.

$$v''(t)\, w(x) = c^2 v(t)\, w''(x)$$

DIVIDO PER $v(t)\, w(x)$

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = c^2 \frac{w''(x)}{w(x)} \qquad \forall t \quad \forall x$$

NON DIPENDE DA x

NON DIPENDE DA t

L'UNICA POSSIBILITA' E' CHE $\frac{v''}{v} = c^2 \frac{w''}{w} = K^2$ costante

$\Longrightarrow$ (i) $v'' = K^2 v \qquad \forall t$

(ii) $w'' = \frac{K}{c^2} w \qquad \forall x \qquad + \quad w(0) = w(L) = 0$

So INOLTRE CHE $w(0) = w(L) = 0$

$\Rightarrow$ $K < 0$ (perché se $K > 0$ trovo degli esponenziali che non sono periodici)

allora $w(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{-K}}{c} x + \theta \right)$

se uso ancora $w(0) = 0$ $w(L) = 0$ $\Rightarrow$ $\theta = 0$

$\frac{\sqrt{-K}}{c} L = n\pi$ $\frac{\sqrt{-K}}{c} = n \frac{\pi}{L}$ per $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{K = -n^2 \frac{\pi^2}{L^2} c^2}$$ con $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $w(x) = A \sin(n \omega_0 x)$

con $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$

FINISCO DOMANI