Analisi Matematica II
Lezione 45
22 marzo 2016

$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ per $-\pi \le t \le \pi$ $\quad (T = 2\pi \quad \omega = 1)$

Sviluppo in serie di F. complessa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

$$(n \neq 0) \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \overset{(f \text{ PARI})}{=} \frac{2}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) e^{-int}\, dt \overset{(\text{per parti})}{=}$$

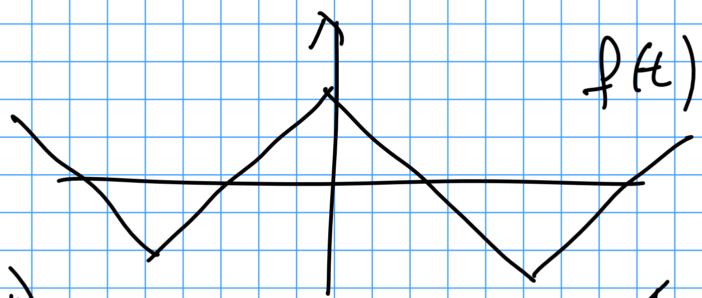
$$\frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{in}\int_0^{\pi} e^{-int} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} Re\left(\underset{\underset{-\frac{1}{im}}{\parallel}}{\frac{i}{m}} \left(-\frac{\pi}{2} e^{-im\pi} - \frac{\pi}{2} e^{0} \right) + \frac{i}{n} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} Re \left(\underbrace{\frac{i}{n}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left((-1)^2+1\right)}_{\text{IMMAGINARIO}} \right) + \frac{(i)^2}{m^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e^{-im\pi} &= \cos(-n\pi) + i\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} \\ &= \cos(n\pi) = (-1)^n \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow$ LA PARTE REALE $= 0$



$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \qquad n \neq 0$$

- $c_0 = 0$ (si vede che la media $= 0$)

QUINDI $\quad a_n = 2 Re\, c_n = \frac{2}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2} & \text{DISPARI} \\ 0 & n \text{ PARI} \end{cases}$

$$b_n = -2 Im(c_n) = 0$$

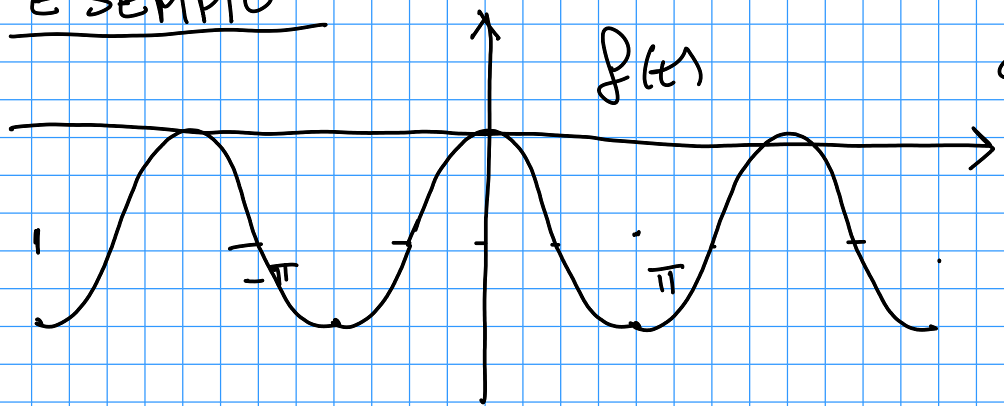
$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{m^2} \cos(mt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$$

- DATO CHE $|c_n| \simeq \frac{1}{n^2}$ POSSO AFFERMARE CHE LA SERIE CONVERGE UNIF. (torno col fatto che f è continua)

- NON POSSO INVECE APPLICARE IL TEOREMA SULLA DERIV. PER SERIE IN QUANTO $\sum \underbrace{n|c_n|}_{\simeq \frac{1}{n}} = +\infty$

IN EFFETTI f NON È DERIVABILE NEI PUNTI $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO



CERCO $f(t) = t^2(t^2 - a^2)$
IMPONENDO
$f'(\pm\pi) = 0$

$f'(t) = 2t(t^2 - a^2) + t^2 \, 2t =$
$2t(2t^2 - a^2)$

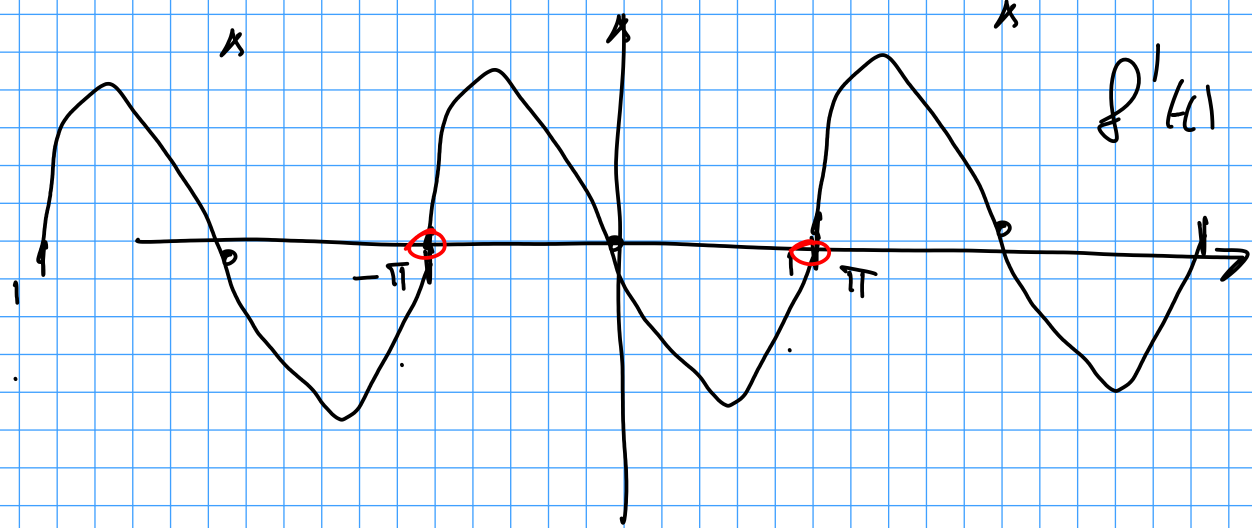
$\boxed{f'(\pi) = 2\pi(2\pi^2 - a^2) \Rightarrow a^2 = 2\pi^2}$

DUNQUE $f(t) = t^2(t^2 - 2\pi^2)$
se $|t| \leq \pi$, estesa in modo che sia 2π periodica

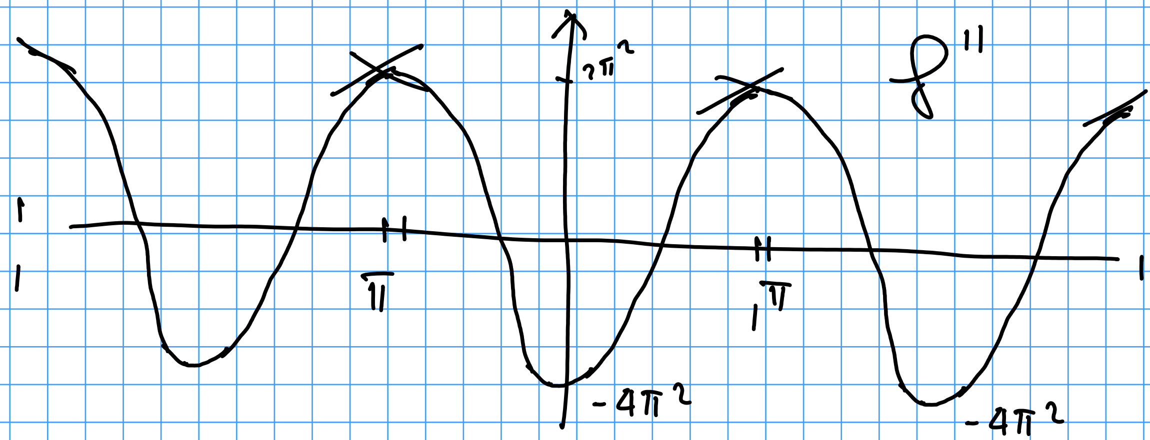
PER COMODITÀ CALCOLO LE DERIVATE DI $f(t)$

$f'(t) = 4t(t^2 - \pi^2)$

$|t| \leq \pi$

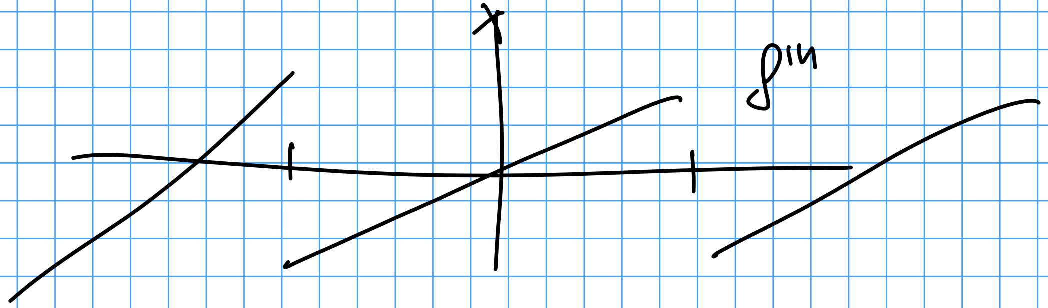


$f''(t) = 4(t^2 - \pi^2) + 4t \cdot 2t = 4(3t^2 - \pi^2)$



$f'''(t) = 24t$

$f^{iv}(t) = 24$



f PARI

Calcolo i c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

$n=0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(t^4 - 2\pi^2 t^2\right) dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t^4 - 2\pi^2 t^2\right) dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^5}{5} - 2\pi^2\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{5}\pi^5 - \frac{2}{3}\pi^5\right) = \pi^4\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi^4}{15}(3-10) = \boxed{\frac{-7\pi^4}{15}}$$

$n \geq 1$ INTEGRO (VARIE VOLTE) PER PARTI

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{i}{n}\underbrace{\left(f(\pi)\, e^{-in\pi} - f(-\pi)\, e^{in\pi}\right)}_{=0} - \frac{i}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt$$

$f(\pi) = f(-\pi)$

$e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$

$$= -\frac{i}{n}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n}\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$\underbrace{f'(-\pi) = f'(\pi) = 0}_{\text{II}} \quad - \frac{1}{n^2}\left[f''(t)\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} +$$

$$\frac{-1}{in^3}\int_{-\pi}^{\pi} f'''(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{i}{n^3}\int_{-\pi}^{\pi} f'''(t)\, e^{-int}\, dt =$$

$$\frac{i}{n^3}\left[f'''(t)\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{i}{n^3}\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f^{IV}(t)\, e^{-int}\, dt =$$

$$-\frac{1}{n^4}\Big(f'''(\pi)\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n} - f'''(-\pi)\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n} \Big) + \frac{1}{n^4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 24\, e^{-int}\, dt}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{n^4}(-1)^n\big(24\pi - 24(-\pi)\big) = -\frac{48\pi(-1)^n}{n^4}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = -\frac{24(-1)^n}{n^4} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_n = -\dfrac{48(-1)^n}{n^4} \quad (n \geq 1) \qquad a_0 = \dfrac{-7}{15}\pi^4 \\ b_n = 0 \end{cases}$$

Se guardo i $|c_n|$ vedo che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie / la serie delle derivate / la serie delle derivate II

CONVERGONO UNIF.

e si può derivare per serie sia all'ordine 1 che all'ordine 2

TORNA CON I GRAFICI SOPRA che mostrano come f, f', f'' sono continue.

DUNQUE

$$f(t) = -48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos(nt) - \frac{7}{15}\pi^4$$

Se metto $t = \pi$ nella formula sopra $\Longrightarrow$

$$f(\pi) = -\frac{7}{15}\pi^4 - 48 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^4} \quad \Longleftrightarrow$$

$$-\pi^4 = \pi^2(\pi^2 - 2\pi^2) = -\frac{7}{15}\pi^4 - 48\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^4} \iff$$

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}\left(1 - \frac{7}{15}\right) = \frac{\pi^4}{\cancel{48}_{6}}\,\frac{\cancel{8}^{1}}{15} = \frac{\pi^4}{90}$$

Posso anche mettere $t=0$ nella formula $\Rightarrow$

$$0 = f(0) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} \Rightarrow$$

$$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7}{15\cdot 48}\pi^4$$

FINO AD ORA HO "SVILUPPATO" UNA FUNZIONE T-periodica IN UNA "SERIE DI ARMONICHE"

ORA FACCIAMO UNA COSA LEGGERMENTE DIVERSA

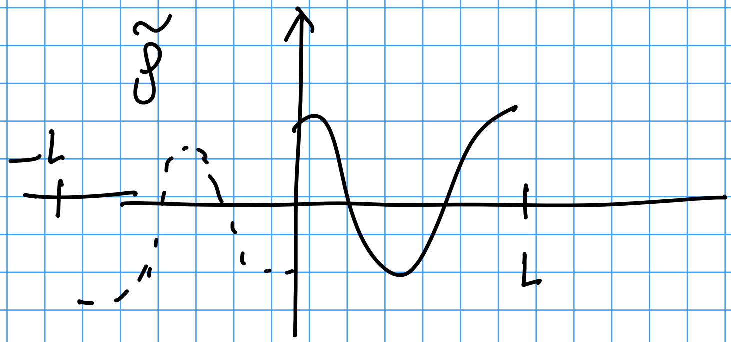
Prendo UN INTERVALLO $[0, L]$ $L>0$ e

$f : [0, L] \to \mathbb{R}$

(I) Estendo f a $[-L, 0]$ IN MODO DISPARI

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 < t < L \\ -f(-t) & \text{se } -L < t < 0 \end{cases}$$

(in $-L, 0, L$ posso prendere la media tra dx e sx



II estendo $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere $2L$-periodica

Se sviluppo $\tilde{f}$ in serie di Fourier trovo

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \tilde{\omega} t)$$

dove $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{2L} = \boxed{\frac{\pi}{L}}$

dove $b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin(n \tilde{\omega} x)\, dx = 2 \int_{0}^{L} f(x) \sin(n \tilde{\omega} x)\, dx$

DUNQUE (se f verifica le ipotesi di regolarità a tratti)

HO SVILUPPATO $f(x)$ = serie di soli seni

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{\omega} x) \qquad 0 \le x \le L \qquad \left(\tilde{\omega} = \frac{\pi}{L}\right)} \quad (\star)$$

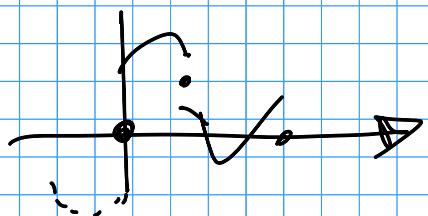
NOTA CHE $\sin(n\tilde{\omega} x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PROPRIETÀ

- Se f è regolare a tratti vale la formula $(\star)$ $\forall x \in [0,L]$

dove si intende che nei punti di salto $f(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

IN PARTICOLARE $f(0) = \dfrac{\tilde{f}(0^+)+\tilde{f}(0^-)}{2} = \dfrac{f(0^+)-f(0^+)}{2} = 0$



e lo stesso in $x=L$

• VICEVERSA se è data una succ. b_n tale che

$$\sum_n |b_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{posso definire} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{\omega} x)$$

TALE serie converge unif. $\Rightarrow f$ è CONTINUA, $f(0)=f(L)=0$

Si può anche fare uno sviluppo in soli coseni.

Dato $f:[0,L] \to \mathbb{R}$, definisco $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \qquad (\tilde{f} \text{ PARI})$$

e poi estendo $\tilde{\tilde{f}}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$-periodico.

Usando Fourier $\Rightarrow$ $\qquad \tilde{\omega} = \frac{\pi}{4}$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\tilde{\omega} x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos(n\tilde{\omega}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\tilde{\omega}x).$$

- Questo sviluppo si può fare se f è regolare e basta
- VICEVERSA SE ho una succ. a_n tale che

$\sum |a_n| < +\infty$ posso definire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\tilde{\omega}x)$$

CONTINUA IN $[0,L]$ (e la serie conv. unif.)

Se in più ho $\sum n|a_n| < +\infty$

f è derivabile, f' è continua e $f'(0) = f'(L) = 0$

- LO SVILUPPO IN SENI $\rightsquigarrow$ CONDIZIONE $f(0) = f(L) = 0$
- LO SVILUPPO IN COSENI $\rightsquigarrow$ CONDIZIONE $f'(0) = f'(L) = 0$

ESEMPIO (un po' limitato)

$$\begin{cases} y'' + a y = f(x) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

[PROBLEMA CON CONDIZIONE AGLI ESTREMI TIPO DIRICHLET]

$a \in \mathbb{R}$ $\quad (L = \pi \to \tilde{\omega} = 1)$

IDEA: CERCO $y(x) = \sum_1^\infty b_n \sin(nt)$

(I°) Sviluppo $f(x)$ in serie di soli seni $\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n \sin(nx) \qquad f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$$

(se f è regolare e tutti lo posso fare)

(II) Suppongo che $y(x) = \sum_1^\infty b_n \sin(nx)$

Se posso derivare per serie

$$y' = \sum_1^\infty n b_n \cos(nx)$$

$$y'' = -\sum_1^\infty n^2 b_n \sin(nx)$$

(III) IMPONGO L'EQUAZIONE $\quad (\quad n^2 \tilde{\omega}^2 b_n \quad)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(-m^2 b_m + a\, b_m - f_m \right) \sin(mx) = 0 .$$

Per verificarla posso imporre

$$\boxed{(a - n^2)\, b_n = f_n \qquad \forall n \geq 1}$$

DUE POSSIBILITÀ

$m^2 \neq a \quad \forall m$ $\qquad \left(m^2 \tilde{\omega}^2 \neq a \iff n^2 \neq \frac{L^2 a}{\pi^2} \right)$

RICAVO $\quad b_n = \dfrac{f_n}{a - n^2} \quad$ che definisce b_n $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

NOTO CHE $\left[\begin{array}{l} \text{FATTO se } f \text{ si sviluppa in serie di F.} \Rightarrow \text{i} \\ \text{coeff. } f_n \text{ tendono a zero per } n \to \infty \end{array} \right]$

$$|b_n| \simeq \frac{|f_n|}{n^2} \leq \frac{\text{cost}}{n^2}$$

$\Rightarrow$ la serie che definisce $y(x)$ conv. unif $\Rightarrow$
y è continua $\quad \boxed{y(0) = y(L) = 0}$

Se aggiungo qualche ipotesi su f $\longrightarrow$ TROVO PROPRIETÀ MIGLIORI SU y.

- Per esempio se $|f_n| \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow b_n \simeq \frac{1}{n^4}$

$\Rightarrow$ y è derivabile 2 volte e vale l'equazione.

- Se invece $|f_n| \simeq \frac{1}{n}$ (PEGGIO - f può essere discontinua)

Trovo y è derivabile una volta, è ragionevole comunque pensare a $y(x)$ come "soluzione generalizzata"

$$y'' + a y = f(x)$$

(se f è discontinua non è chiaro il significato dell'eq.

L'USO DELLA SERIE DI FOURIER PERMETTE DI RISOLVERE L'EQ. "PER SERIE" e INOLTRE FORNISCE UNA NOZIONE DI SOLUZIONE ANCHE QUANDO f NON È CONTINUA.

<u>CASO</u> $a = k^2$ PER UN $k \in \mathbb{N}$ LA COND. DIVENTA

$(k^2 - n^2) b_n = f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ f_k DEVE ESSERE ZERO (se no $\nexists$ $y(x)$)

se $f_k = 0$ b_k può essere qualunque

IN QUESTO CASO SI RISOLVE SOLO PER CERTE f

E LA SOL. NON È UNICA