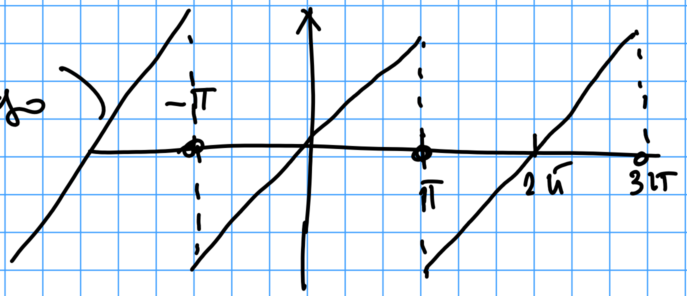
Analisi Matematica II
Lezione 44
21 marzo 2016

Serie di Fourier.

ESEMPI

(Dente di sega)



$T = 2\pi$

$\downarrow$

$\omega = 1$

$f(t) = t$ se $-\pi < t < \pi$ è continua eccetto che in $\pi + 2k\pi$
(estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico)

Se escludo i punti di discontinuità f è derivabile e
$f'(t) = 1$ (dunque limitata) $\Rightarrow$ f È REGOLARE A TRATTI

Se definisco $f(t) = 0$ nei punti $\pi + 2k\pi$ $\Rightarrow$

$$f(t) = \left(f(t^+) + f(t^-)\right)/2$$

e dunque
$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right]$$

dove $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ e se $n\geq 1$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt) \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)$$

<u>NOTA</u> (fatto generale) VALE:

se f è pari $\left(f(t)=f(-t)\right)$ $\Rightarrow$ $b_n=0$ $\forall n$

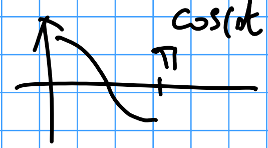
se f è dispari $\left(f(t)=-f(-t)\right)$ $\Rightarrow$ $a_n=0$ $\forall n$

Nel nostro caso <u>f è dispari</u> (basta controllarlo su $]-\pi,\pi[$ e in questo intervallo $f(t)=t$ che è dispari)

DUNQUE SO A PRIORI CHE a_n sono tutti nulli.

Vediamo i b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[t\,\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = \Bigg($$  $$\Bigg)$$

$$-\frac{2}{\pi n}\pi\cos(n\pi) + 0 + \frac{2}{\pi n}\Big[\underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0}\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

Dunque $f(t) = -\sum \frac{2(-1)^n}{n}\sin(nt) \quad \forall t$

Noto (per dopo) che $|b_n| = \frac{2}{n}$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = +\infty$

Si poteva anche fare il calcolo nei complessi:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\,dt \quad (= \text{per parti})$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{t\, e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi i n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,dt}_{=0 \left(\text{si può verificare facilmente. } \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\right)}$$

$$\|$$

$$-\frac{1}{2\cancel{\pi} in}\cancel{\pi}\, e^{-in\pi} + \frac{1}{2\cancel{\pi} in}(-\cancel{\pi})\, e^{in\pi}$$

$$= -\frac{1}{in}\left(e^{-in\pi} + e^{in\pi}\right) = -\frac{2(-1)^n}{2in} = \frac{(-1)^n i}{n}$$

sono uguali $\quad e = \cos(\pm n\pi) + i\underbrace{\sin(\pm n\pi)}_{=0} = \cos(n\pi)$

Ricordo che $a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$ $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_n = 0$ $b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$ (TORNA CON QUANTO CALCOLATO PRIMA)

ALCUNE PROPRIETÀ DEI COEFF. DI FOURIER.

- Se f pari $\Rightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n$
- Se f dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0 \ \forall n$

per es. se f pari $\Rightarrow$ $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ è dispari

$$\Rightarrow \int_{-T}^{T} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

- Se f ha valori reali $\Rightarrow$ $\boxed{c_{-n} = \overline{c_n}}$.

Infatti

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{e^{-in\omega t}}\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\overline{f}(t)\,e^{-int}}\,dt = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}(t)\,e^{-int}\,dt} =$$

$(f$ reale $\leftrightarrow \overline{f} = f)$ $= \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}} = \overline{c_n}$

Il calcolo fatto mostra che:

se c_n = coeff. di f $\quad d_n$ = coeff di $\overline{f}$ ALLORA

$$c_{-n} = \overline{d_n}$$

- f pari $\Rightarrow$ $\boxed{c_n = c_{-n}}$
- f dispari $\Rightarrow$ $\boxed{c_n = -c_{-n}}$

Per esempio CASO DI SPARI

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega t}\, dt = \left(\text{cambio di variabile } \begin{matrix} t = -s \\ dt = -ds \end{matrix}\right)$$

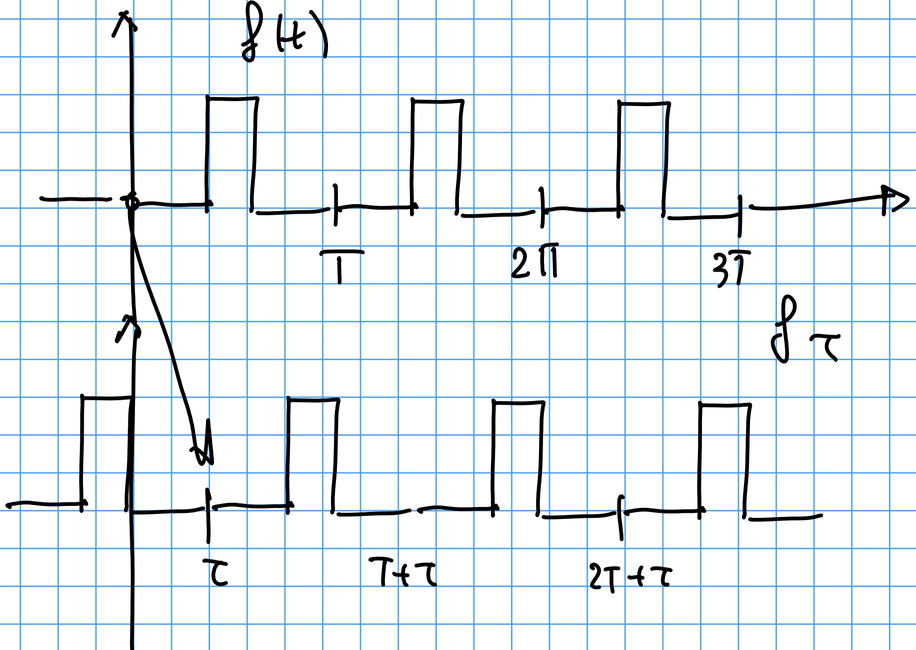
$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} f(-s)\, e^{-in\omega s}(-ds) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(-s)\, e^{-in\omega s}\, ds$$

$$= (f \text{ dispari}) \quad -\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(s)\, e^{-in\omega s}\, ds = -c_n$$

METTENDO INSIEME LE PRECEDENTI:

- f reale pari $\Leftrightarrow$ $c_n \in \mathbb{R}$ $\quad c_{-n} = c_n$ $\quad (\Rightarrow b_n = 0)$
- f reale dispari $\Leftrightarrow$ $c_n \in i\mathbb{R}$ (c_n IMMAGINARI PURI) $\quad c_{-n} = -c_n$ $\quad a_n = 0$

FATTO Se $\tau \in [0,T]$ posso considerare la funzione traslata f_τ definita da $f_\tau(t) = f(t-\tau)$



il grafico di f_τ è il grafico di f traslato verso destra di τ

Allora se c_n = coeff di f e c_n^τ sono quelli di f_τ

$$c_n^\tau = \frac{1}{T}\int_0^T f_\tau(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

$$(t-\tau =: s \;, dt = ds) \quad = \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} f(s)\, e^{-in\omega(s+\tau)}\, ds =$$

$$(\text{per la periodicità dell'integranda}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, e^{-in\omega(s+\tau)}\, ds =$$

$$\frac{e^{-in\omega\tau}}{T}\int_0^T f(s)\, e^{-in\omega s}\, ds \Rightarrow$$

$$(*) \quad \boxed{c_n^\tau = e^{-in\omega\tau}\, c_n}$$

per esempio se $\tau = \frac{T}{2}$ $\quad c_n^\tau = e^{-n\omega\frac{T}{2}} c_n = e^{-n\pi} c_n$ $\quad \left(\omega \leftarrow \frac{2\pi}{T}\right)$

(se $T = 2\pi$ $\tau = \pi$). $\quad = (-1)^n c_n$

(sugli a_n / b_n è più difficile leggere l'effetto)

Se leggo $(*)$ in termini di modulo e argomento

$$c_n = A_n e^{i\theta_n} \Rightarrow \boxed{c_n^\tau = A_n e^{i(\theta_n - in\omega\tau)}}$$

RIESAMINIAMO LA SERIE DI FOURIER DA UN ALTRO PUNTO DI VISTA.

Fino ad ora: data $f \to$ calcolo a_n, b_n (c_n) $\to$ serie di Fourier di f

<u>VICEVERSA</u> posso chiedermi

Dati dei coeff. a_n, b_n $\longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

(c_n) $\qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \right)$

<u>PROPOSIZIONE</u> Supponiamo che a_n, b_n due successioni di numeri reali tali che $\boxed{\sum |a_n| < +\infty, \sum^{\infty} |b_n| < +\infty}$

(le due serie sono ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI)

ALLORA la serie di Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

<u>CONVERGE UNIF.</u> su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ è ben definita la sua somma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e f è CONTINUA (ADDENDI CONTINUI + CONV. UNIF.).

INOLTRE $n \geq 1$ $\quad \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = a_n \Big\{ \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = b_n$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = a_0$$

ANALOGAMENTE (caso complesso) Data una succ. (c_n) in $\mathbb{C}$

Se $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty}$ $\Rightarrow$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}$$

CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f CONTINUA

e $$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t} = c_n$$

Dim Si vede che c'è la convergenza totale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cos(n\omega t)}_{f_n(t)}$$

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = |a_n|$$

(stesso discorso per i seni)

Dato che (per ipotesi) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ CONV. TOTALE

$\Rightarrow$ CONV. UNIF.

La conv. unif. mi permette anche di "integrare per serie"

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)\right)\cos(n\omega t)\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt}_{=} = \begin{cases} a_n \frac{T}{2} & \text{se } n \geq 1 \\ a_0\, T & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$0 \quad n \neq k$ $\qquad \frac{T}{2}$ se $n = k \geq 1$ $\qquad T \quad n = k = 0$

$\Rightarrow$ LA FORMULA PER GLI a_n

SE AGGIUNGO SOMMABILITÀ AI COEFFICIENTI

$\Rightarrow$ GUADAGNO REGOLARITÀ SU f.

PROP. Supponiamo che a_n b_n siano due succ in $\mathbb{R}$ (c_n succ. in $\mathbb{C}$) e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k |a_n| < +\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |b_n| < +\infty$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k |c_n| < +\infty \right)$$

(L'ipotesi di prima corrisponde a $k=0$)

ALLORA la funzione $f(t)$ definita dalla serie di F.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\left(= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \right)$$

è DERIVABILE K VOLTE E LE SUE DERIVATE (fino alla k-esima) si ottengono derivando per serie

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n\omega a_n \sin(n\omega t) + n\omega b_n \cos(n\omega t) \dots$$

$$\left(= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} in\omega c_n e^{in\omega t} \right)$$

$$f''(t) = - -$$

DIM. VEDIAMO IL CASO $k=1$. In questo caso il teorema dice che, per poter derivare f, serve

$$\sum |a_n| n < +\infty \qquad \sum |b_n| n$$

. Ricordiamo che per derivare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ serve la convergenza unif della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t)$

Nel nostro caso

$$f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) \qquad g_n(t) = b_n \cos(n\omega t)$$

$$f'_n(t) = -n\omega a_n \sin(n\omega t) \qquad g'_n(t) = n\omega b_n \sin(n\omega t)$$

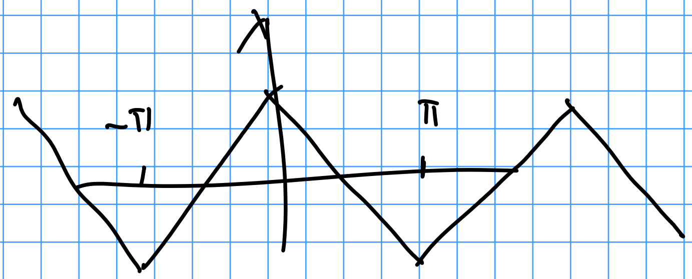
Se faccio i massimi su $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |f'_n(t)| = n\omega |a_n| \qquad \max_{t\in\mathbb{R}} |g'_n(t)| = n\omega |b_n|$$

PER IPOTESI $\sum n\omega |a_n| < +\infty \quad \sum n\omega |b_n| < +\infty \Rightarrow$

CONV. TOTALE DELLA SERIE DELLE DERIVATE $\Rightarrow$ TESI

ESEMPIO (già visto - facciamo il calcolo nei complessi)



$\leftarrow f(t)$ $\quad f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ su $[-\pi, \pi]$

Vediamo la serie complessa: (NOTO CHE f è pari)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) e^{-in\omega t} \, dt$$

[vediamo se f pari (REALE) semplifica qualcosa:

$$f(t) = f(-t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} = \frac{1}{T}\Bigg(\underbrace{\int_{-T/2}^{0} f(t) e^{-in\omega t}}_{(1)} + \underbrace{\int_{0}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t}}_{(2)} \Bigg)$$

(1) cambio variabile $s = -t$ $\quad ds = -dt$

$$(1) = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(-s)\, e^{i\omega n s}\, ds = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(s)\, e^{i\omega n s}\, ds =$$

$$\overline{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(s)\, e^{-in\omega s}\, ds} = \overline{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} + \overline{\int_0^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}}\right) =$$

$$\frac{2}{T}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt\right)$$

RIASSUMENDO

f REALE PARI $\rightarrow$ $\quad C_n = \dfrac{2}{T}\,\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\right)$

f REALE DISPARI $\rightarrow$ $\quad C_n = \dfrac{2i}{T}\,\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\right)$

TORNANDO ALL'ONDA TRIANGOLARE

$$c_n = \frac{e}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) e^{-int}\, dt \right) = \text{(per parti)}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{in\pi} \int_0^{\pi} e^{-int}\, dt \right) =$$