Serie di Fourier.

Dato $T > 0$ chiamo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e considero le funzioni

$$\sin(n\omega t) \qquad \cos(n\omega t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Sono tutte T-periodiche:

$$\sin(n\omega(t+T)) = \sin(n\omega t + n\omega T) =$$

$$\sin(n\omega t + n2\pi) = \sin(n\omega t)$$

(lo stesso per il $\cos(n\omega t)$)

Chiamo "polinomio trigonometrico" una espressione del tipo

$$\sum_{i=0}^{K} a_i \cos(n\omega t) + \sum_{i=1}^{K} b_i \sin(n\omega t)$$

dove $a_0, a_1 \dots a_K, b_1 \dots b_K \in \mathbb{R}$ $\qquad (K \in \mathbb{N})$

Chiamo "serie trigonometrica / serie di Fourier"

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega)$$

dove $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$

Diremo che la serie trigonometrica converge se convergono separatamente le due serie scritte sopra, cioè se esistono i limiti

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{K} a_n \cos(n\omega t) \qquad \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} b_n \sin(n\omega t)$$

OVVIAMENTE quanto appena scritto è una convergenza puntuale

Posso introdurre la convergenza uniforme come al solito

NOTA (da precisare eventualmente) Potrei riscrivere le serie trigonometrica come

$$\mathrm{Re}\left(\sum c_n e^{in\omega t}\right) \quad e \quad \mathrm{Im}\left(\sum c_n e^{in\omega t}\right)$$

$$\left(e^{i\omega t}\right)^n$$

Queste sono serie di potenze $\sum c_n z^n$ dove però $z \in$ Bordo del cerchio di convergenza

ALTRO PUNTO DI VISTA

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T periodica cerco di esprimere $f(t)$ come "sovrapposizione di armoniche" e cioè come

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}_{(*)} = f(t)$$

FACCIAMO DEI CALCOLI PER CAPIRE COME DEVONO ESSERE (a_n) e (b_n) PERCHÉ VALGA $(*)$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt \qquad \text{per } n, m \in \mathbb{N} \ (\geq 1)$$

$\parallel$ (per parti)

$$\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \sin(m\omega t) \right]_0^T + \frac{1}{n\omega} \int_0^T \cos(n\omega t)\, m\omega \cos(m\omega t)\, dt$$

$$\left.\begin{aligned} &-\cos(n 2\pi) \sin(m 2\pi) - \\ &-\cos(0) \sin(0) \end{aligned}\right\} = 0 \qquad = \frac{m}{n} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)\, dt$$

$$= \frac{m}{n} \left[\underbrace{\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \cos(m\omega t)}_{=0} \right]_0^T + \frac{m}{n^2\omega} \int_0^T \sin(n\omega t)\, m\omega \sin(m\omega t)\, dt$$

$$= \frac{m^2}{n^2} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{se } n = m \end{cases}}$$

Se $n = m$ $\quad \int_0^T \sin^2(n\omega t)\, dt = \int_0^T \frac{1 - \cos(2n\omega t)}{2}\, dt = \frac{T}{2}$

In maniera analoga

$$\boxed{\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{se } n = m \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0 \quad \text{se } n \geq 0,\ m \geq 1}$$

Ora supponiamo che

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Fisso $n_0 \geq 0$ Moltiplico per $\cos(n_0 \omega t)$

$$f(t)\cos(n_0\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)\cos(n_0\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)\cos(n_0\omega t)$$

INTEGRO TRA 0 e T e suppongo di poter scambiare $\int_0^T$ e $\sum$

$$\int_0^T f(t)\cos(n_0\omega t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(n_0\omega t)\,dt}_{=0 \text{ se } n \neq n_0 \,/\, \text{fa } \frac{T}{2} \text{ se } n = n_0 \geq 1 \,/\, T \text{ } n_0 = n = 0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(n_0\omega t)\,dt}_{=0}$$

$$\int_0^T f(t)\cos(n_0\omega t)\,dt = a_{n_0}\frac{T}{2} \quad \text{se } n_0 \geq 1$$

$$a_0 \, T \quad \text{se } n_0 = 0$$

RICAVO

$$\boxed{a_k = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k \omega t)\, dt & \text{per } k \geq 1 \\ \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt & \text{se } k = 0 \end{cases}}$$

Se moltiplico per $\sin(n_0 \omega t)$, integro e ragiono come sopra

$$\Rightarrow \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k \omega t)\, dt}$$

<u>Def.</u> Dato $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica integrabile sugli intervalli limitati (per es continua) chiamo "coefficienti di Fourier" gli a_k / b_k definiti dalle formule sopra.

<u>OSS.</u> Nella definizione di a_k e b_k si può integrare su un qualunque intervallo $[a, b]$ con $b - a = T$ (perché

gli integrali sono T-periodici). Per es.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t) \qquad k \geq 1 \ \Big/ \ a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)$$

PROBLEMA Data f. Costruiti gli a_k / b_k come sopra.

POSSO DIRE CHE EFFETTIVAMENTE

$$f(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)}_{\text{serie di Fourier di } f}$$

RISPOSTA (non ovvio)

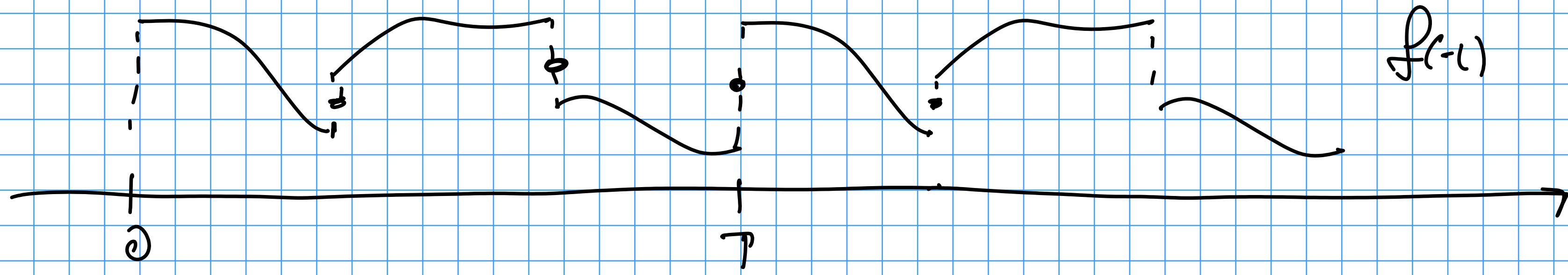
Si sa che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier NON converge in nessun x.

TEOREMA Supponiamo f "REGOLARE A TRATTI" su $[0,T]$, cioè (f è T-periodica) $\exists\ 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T$

Ipotesi: f è continua, derivabile, derivata limitata su $]t_i, t_{i+1}[$

$$\left(\Rightarrow \ \forall t_i \quad \exists \lim_{t\to t_i^+} f(t) = f(t_i^+) \qquad \exists \lim_{t\to t_i^-} f(t) = f(t_i^-)\right)$$

Però $f(t_i^+)$ può essere $\neq$ da $f(t_i^-)$



ALLORA LA SERIE DI FOURIER (relativa a f)

converge puntualmente a

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

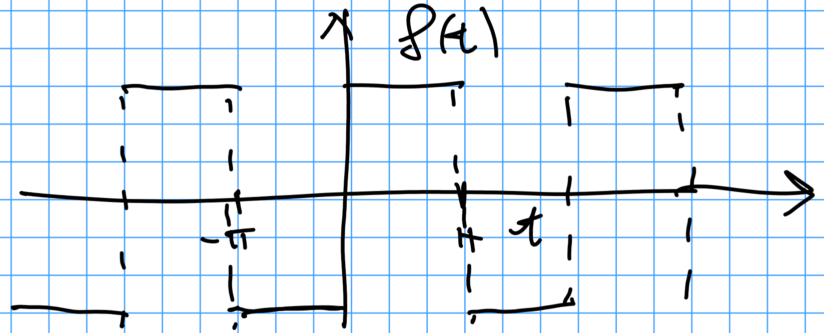
(se f è continua in $t \Rightarrow \Sigma$ converge a $f(t)$)

(NO DIM.)

ESEMPIO (onda quadra) $T = 2\pi$ $(\omega = 1)$

(per semplicità)

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < t < 0 \end{cases}$$



(estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità)

Calcolo i coeff di Fourier di f.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt}_{-\pi} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} 1\,dt}_{\pi} = 0$$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\cos(n\omega t)}_{\text{dispari}}\,dt = 0$$

$$\left(= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = \ldots = 0 \right)$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{\text{PARI}}\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \cos(0)\Big) =$$

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1 \dots$$

$$\frac{1-(-1)^n}{n\pi} = b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

Dato che f è regolare a tratti $\Rightarrow$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(nt) = \qquad (n=2h \,/\, n=2h+1)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{(2h+1)}\sin((2h+1)t)}$$

(tutte armoniche dispari)

questo = vale per le $t \neq k\pi$; vale in $t = k\pi$ se in quei punti metto $f(t)=0$

La convergenza è puntuale NON può essere uniforme

perché f è discontinua / i polinomi trigonometrici sono continui

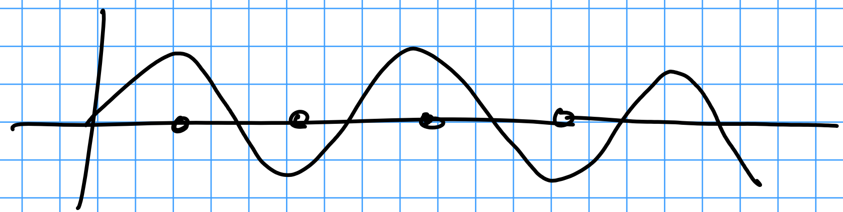
SE METTO $t = \frac{\pi}{2}$ nella formula sopra $\Longrightarrow$

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\Downarrow$$

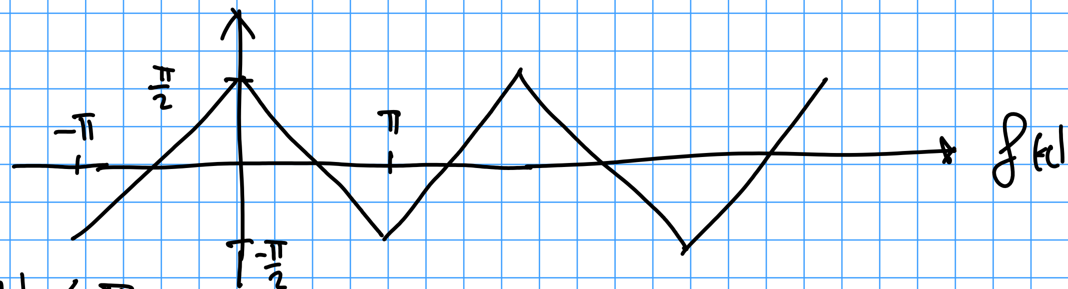
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$



ESEMPIO (onda triangolare)

$T = 2\pi$



$$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t| \quad \text{se} \quad |t| \le \pi$$

f è PARI $\rightsquigarrow$ $b_n = 0$ $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(t)}_{\text{dispari}}\,dt = 0 \right)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \underset{(\text{PARITÀ})}{=} \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} - 0\right) = 0$$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \underset{(\text{PARITÀ})}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \underset{(\text{per parti})}{=}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0\ (\sin(0) = \sin(n\pi) = 0)} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \overset{=-1}{f'(t)}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ DISP.} \end{cases}$$

DUNQUE

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^m}{m^2} \cos(mt) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)} \cos((2h+1)t)$$

(PUNTUALMENTE)

<u>DOMANDA</u> c'è conv. unif. ?? <u>SÌ</u> perché

la serie sopra converge totalmente su $\mathbb{R}$. Infatti:

$$M_h = \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{(2h+1)^2} \cos(2h+1)t \right| = \frac{1}{(2h+1)^2}$$

dunque $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} M_h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2}$ <u>CONVERGE</u> $\Rightarrow$ CONV. TOTALE

$\Rightarrow$ CONV. UNIF.

$$\geq \frac{1}{2h^2}$$

<u>NOTA</u> Metto $t = 0$. TROVO

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} \Rightarrow \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots +$$