Analisi Matematica II
Lezione 41
14 marzo 2016

ESERCIZIO Risolvere per serie (di potenze) l'eq.

$$x^2 y'' - y' - 6y = 0$$

Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Se y esiste $\to$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ (n=2)}}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^n$$

IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n n(n-1) - a_{n+1}(n+1) - 6 a_n \Big) x^n = 0$$

$$\sum \left[a_n (n^2 - n - 6) - a_{n+1}(n+1) \right] x^n = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{n+1}\underset{\neq 0}{(n+1)} = (n^2-n-6)\,a_n \qquad \forall n = 0 \dots \infty$$

(a)

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{n^2-n-6}{n+1}\,a_n \qquad \forall n \geq 0}$$

(R) determine tutti gli a_n per $n \geq 1$ a partire da un arbitrario a_0

Mettiamo - per esempio - $a_0 = 1$

$\underline{n=0}$ $\quad a_1 = \frac{-6}{1}\,a_0 = -6$

$\underline{n=1}$ $\quad a_2 = \frac{1^2-1-6}{2}\,a_1 = \left(-\frac{6}{2}\right)(-6) = 18$

$\underline{n=2}$ $\quad a_3 = \frac{2^2-2-6}{3}\,a_2 = \frac{-4}{\cancel{3}}\cdot \cancel{18}^{\,6} = -24$

$\underline{n=3}$ $\quad a_4 = \frac{3^2-3-6}{4}\,a_3 = \frac{0}{4}\,a_3 = 0$

$\underline{n=4}$ $\quad a_5 = \frac{4^2-4-6}{5}\cdot a_4 = (\quad)\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\forall n \geq 4 \quad a_n = 0}$

Dunque $\boxed{y(x) = 1 - 6x + 18x^2 - 24x^3}$

In generale (per linearità)

$$y(x) = a_0 \left(1 - 6x + 18x^2 - 24x^3 \right) \leftarrow \text{SOLUZIONE CON } y(0) = a_0$$

(chiaro che $y(x)$ è ben definita $\forall x$, essendo un polinomio di grado 3)

<u>ALTRO ESEMPIO</u> (IMPORTANTE NELLA PRATICA)

Risolvere per serie:

$$(B_k) \qquad x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0$$

Eq. di Bessel di ordine K

dove k è un intero assegnato

Cerco al solito $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Soliti conti:

$$x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \Rightarrow x y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^n .$$

Imponendo che valga l'equazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(n^2 \cancel{- n} + \cancel{n} - k^2 \right) + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 (-k^2) + a_1 x (1-k^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n (n^2-k^2) + a_{n-2} \right) x^n = 0$$

$\Leftrightarrow$ (tutti i coefficienti nulli)

$$(R_k) \quad \begin{cases} -k^2 a_0 = 0 \\ (1-k^2) a_1 = 0 \\ a_n (n^2-k^2) + a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

<u>CASO $k=0$</u>

(R_0) $\begin{cases} a_0 \text{ qualunque} & (0 \cdot a_0 = 0 \text{ sempre vero}) \\ a_1 = 0 & \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2} & \forall n \geq 2 \end{cases}$

Dalla terza relazione trovo:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{1}{4} a_0$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{16} = \frac{1}{4}\frac{1}{16} a_0 = \frac{a_0}{4^2(1 \cdot 4)}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{25} = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{36} = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{16} \frac{1}{4} a_0 = \frac{-a_0}{4^3(1 \cdot 4 \cdot 9)}$$

$$a_7 = 0$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{64} = \frac{1}{64}\frac{1}{36}\frac{1}{16}\frac{1}{4} a_0 = \frac{a_0}{4^4(1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16)}$$

$$a_{2k+1} = 0$$

(dispari)

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{4^k (k!)^2}$$

$a_{2h+1} = 0 \qquad a_{2h} = \dfrac{(-1)^h a_0}{4^h (h!)^2}$

Si vede facilmente che $\sqrt[n]{a_n} \to 0 \Rightarrow$ Raggio $= +\infty$

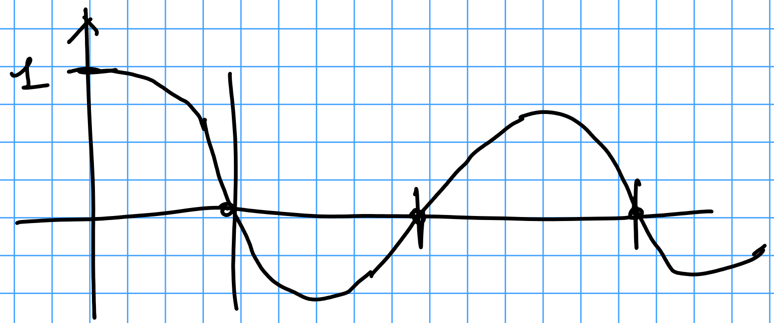
Dunque $y(x) =$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

PER CONVENZIONE CHIAMO $J_0(x)$ la soluzione con

$a_0 = 1$ — quindi $y(x) = a_0 J_0(x)$

J_0 FUNZIONE DI BESSEL DI ORDINE ZERO

J_0



$J_0(0) = 1$

$J_0'(0) = 0$

(solo potenze pari $J^{(2K+1)}(0) = 0$)

J_0 ha infiniti zeri, all'infinito "somiglia" a un $\sin(?x)$

CASO $k=1$

$$(R_1)\quad \begin{cases} - & a_0 = 0 \\ 0 & a_1 = 0 \\ a_n(n^2-k^2)+a_{n-2} = 0 & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a_0 = 0 \qquad a_1$ è arbitrario

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2-1} \qquad \forall n \geq 2$$

$a_{2h} = 0 \quad \forall h \qquad$ (a_{2h} dipende da $a_{2(h-1)}$ - - - dipende da $a_0 = 0$)

a_1 arbitrari

$n=3 \qquad a_3 = -\dfrac{a_1}{9-1} = -\dfrac{a_1}{8} =$

$n=5 \qquad a_5 = -\dfrac{a_3}{25-1} = \dfrac{1}{24}\dfrac{1}{8}a_1 = \dfrac{1}{8^2}\dfrac{1}{(1\cdot 3)}a_1$

$n=7 \qquad a_7 = -\dfrac{a_5}{49-1} = -\dfrac{1}{48}\dfrac{1}{24}\dfrac{1}{8}a_1 = -\dfrac{1}{8^3}\dfrac{1}{(6\cdot 3\cdot 1)}a_1$

$n=9 \qquad a_9 = -\dfrac{a_7}{81-1} = \dfrac{1}{80}\dfrac{1}{48}\dfrac{1}{24}\dfrac{1}{8}a_1 = \dfrac{1}{8^4}\dfrac{1}{10\cdot 6\cdot 3\cdot 1}a_1$

Si vede che $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k\, 2\, a_1}{2\, k!\,(k+1)!\, 4^k} = \dfrac{(-1)^k\, 2\, a_1}{2^{2k+1}\, k!\,(k+1)!}$

(vediamo se torna con i primi termini

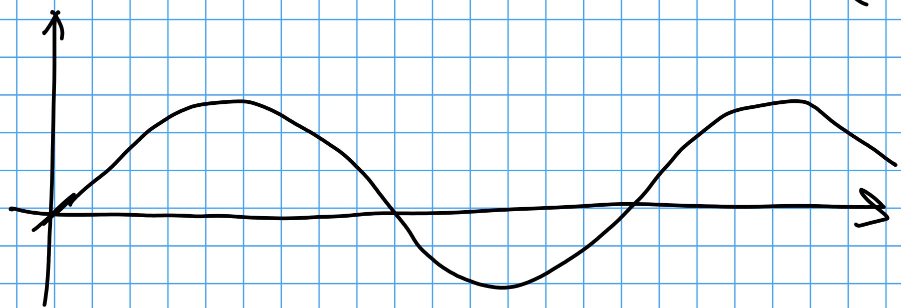
$k=0 \longrightarrow a_1$

$k=1 \longrightarrow a_3 = \dfrac{-\cancel{2}}{8 \cdot 1 \cdot \cancel{2}}\, a_1 = -\dfrac{1}{8}\, a_1$

$k=2 \longrightarrow a_5 = \dfrac{\cancel{2}}{2^5\, \cancel{2}\, 6}\, a_1 = \dfrac{a_1}{2^6 \cdot 3}$ TORNA

(il caso generale si dimostra per induzione

$a_{2n} = 0 \qquad a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!\,(k+1)}\, a_1 =: J_1(x)\, a_1$



$J_1(0) = 0$

$J_0(0) = 1$

CASO $k \geq 2$ $\qquad a_0 = a_1 = 0$

$$(m^2 - k^2)\, a_{m+2} = -a_n$$

$\Rightarrow \quad a_n = 0$ fino a $n = k$

a_k LIBERO

$\Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$

a_k libero

da $m \geq k+1$ $\qquad a_{m+2} = -\dfrac{a_n}{m^2 - k^2} \qquad \forall n \geq k+1$

Se k è pari $\Rightarrow$ tutti gli $a_{2h+1} = 0$

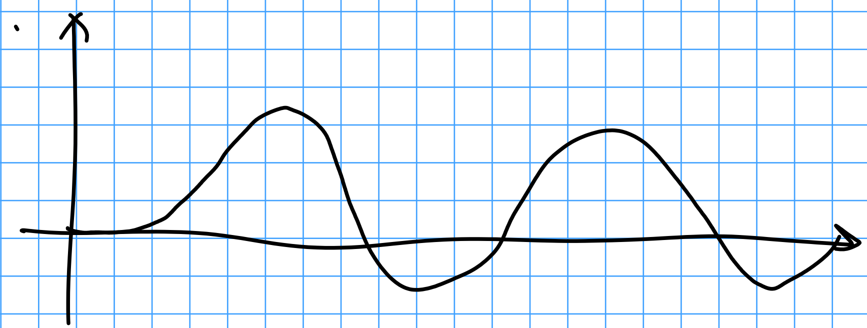
Se k è dispari $\Rightarrow$ tutti gli $a_{2k} = 0$

$$\underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{\text{PRIMI } k-1 \text{ termini}} \quad \neq 0 \quad 0 \quad \neq 0 \quad 0 \quad \neq 0 \quad \dots$$

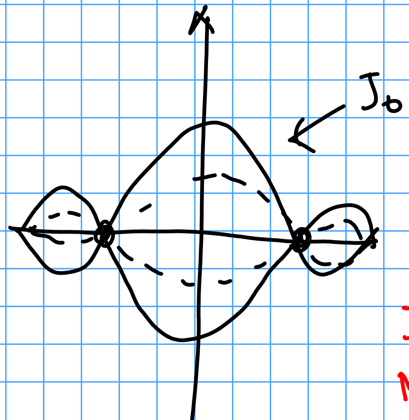
Si vede che $\qquad y(x) = a_k \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \, k!}{4^h \, h! \, (h+k)!} \, x^{k+2h} = J_k(x) \cdot a_k$

J_k = k-esima funzione di Bessel

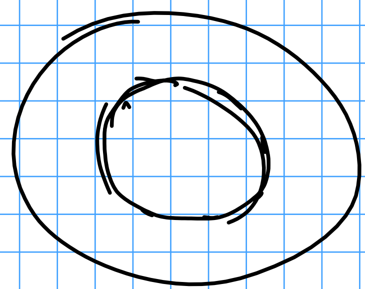
$J_k(0) = J_k'(0) = \dots J_k^{(k-1)}(0) = 0 \qquad J_k^{(k)} = k!$ OK

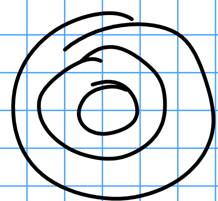


VEDREMO (se riusciamo) che $J_k(x)$ sono legate (tra le altre cose) ai "MODI FONDAMENTALI" DI VIBRAZIONE DI UNA MEMBRANA ELASTICA CIRCOLARE (TAMBURO ELASTICO)

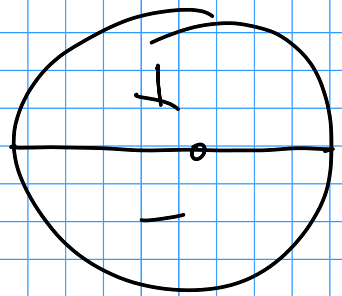


$J_0 \to$ MODALITÀ RADIALI

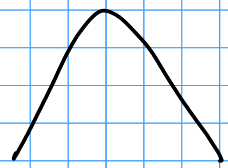


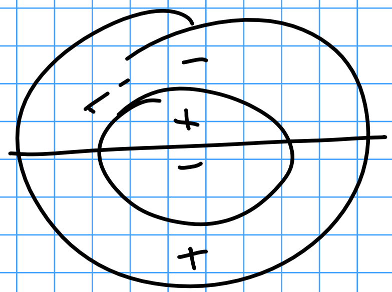


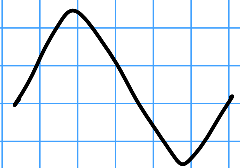
RAGGIO

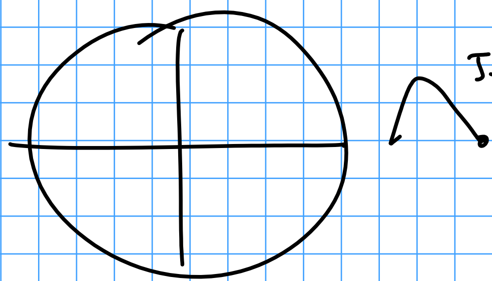


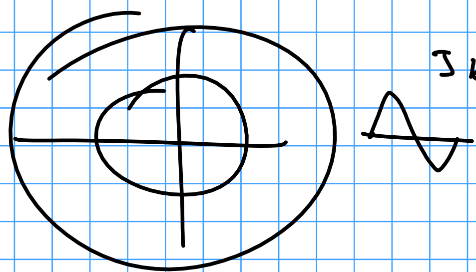
→ PRODOTTO DI $J_1(\rho)\cos(\theta)$

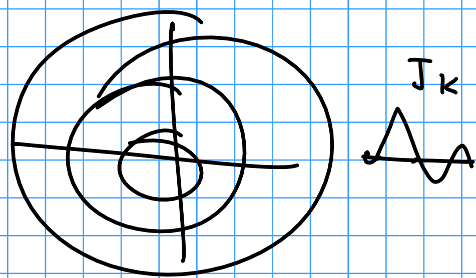




J_1  $\times \cos(\theta)$







J_k → comportamento radiale per "k zone angolari"