Analisi Matematica II
Lezione 39
8 marzo 2016

VISTO:

Data (a_n) successione di numeri reali posso definire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

per tutte le $x \in \,]-\bar{R}, \bar{R}[$, dove:

$$\bar{R} = 1 \Big/ \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Questa funzione è infinitamente derivabile in $]-\bar{R}, \bar{R}[$ e

$$(*) \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ termini}} x^{n-k}$$

Da (*) si ricava (mettendo $x=0$)

$$a_K = \frac{f^{(K)}(0)}{K!} \qquad (K\text{-esimo coeff di Taylor per } f)$$

DUNQUE se f è definita come una serie di potenze $\Rightarrow$
f è somma della propria serie di Taylor

<u>OSS.</u> Tutto questo si può rifare in $\mathbb{C}$ $(a_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C})$

In quel caso $f(x)$ converge nel disco aperto di centro 0 e raggio $\overline{R}$

<u>ESEMPIO</u> $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \Rightarrow \overline{R} = +\infty$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{converge } \forall x \in \mathbb{R}$$

Per quanto detto sopra $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x)$

Inoltre $f(0) = a_0 = 1$. DUNQUE $f(x) = e^x$

IN REALTÀ POTREI <u>DEFINIRE</u> $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

In questo modo posso anche definire $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$ $z \in \mathbb{C}$

(INTENDO CHE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}$ ← ESISTE COME LIMITE IN $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$$\iff \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}\right) \text{ e } \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}\right)$$ HANNO LIMITE PER $n \to \infty$

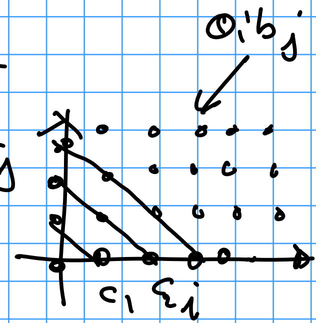
$$\mathrm{Re}(\ldots) \downarrow a \qquad \mathrm{Im}(\ldots) \downarrow b$$

$$a + ib = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
)

SE FACCIO QUESTA DEFINIZIONE: $\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$

SCOPRO UN PO' DI COSE.

(a) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ INFATTI



$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = (A)$$

[Formula di Cauchy: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$c_0 = a_0 b_0$ $\quad c_1 = a_0 b + a_1 b_0 \ldots$ ↑ se $\sum a_n$ $\sum b_n$ CONV. ASS.

$$(\star) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} z^k w^{n-k} = \text{(binomio di Newton)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}$$

(b) In termini di numeri Reali:

$$e^{a+ib} = e^{a} e^{ib}$$

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

n PARI

n DISPARI

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k+1)!} = \cos(b) + i \sin(b)$$

(c) quello di prima: $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

PROBLEMA Posso "fare il percorso inverso" ??

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞; posto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

, posso dire che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge a $f(x)$??

(per quali x ??)

IN GENERALE NO

- Abbiamo già visto che, per esempio $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ha come coeff di Taylor

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ (-1)^k & n = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$ conv. solo su $]-1,+1[$

(a $f(x)$). DUNQUE $f(x)$ esiste $\forall x$, ma la serie di Taylor converge a $f(x)$ solo su $]-1,+1[$

IN QUESTO CASO $\sum a_n x^n$ se converge $\Rightarrow$ conv. a $f(x)$

SI PUÒ FARE UN CONTROESEMPIO PIÙ "RADICALE"

(in cui a_n = coeff di Taylor di una $f(x)$, $\sum a_n x^n$ CONVERGE $\forall x$

ma non converge a $f(x)$)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad x \neq 0 \qquad f(0) = 0$$

- SI VEDE CHE $\lim_{x\to 0} f(x) = \left(e^{-\infty}\right) = 0 = f(x)$

DUNQUE f continua in ZERO $\Rightarrow$ f continua in $\mathbb{R}$

- Calcoliamo $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -e^{-\frac{1}{x^2}}(-2)x^{-3} =$

$\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^3}$ (se $x \neq 0$). $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (VINCE e^{-1/x^2})

($e^{-1/x^2} \to 0$ PIÙ RAPIDAMENTE DI x^k $\forall k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ f è derivabile e $f'(0) = 0$

- $f''(x)$ $(x \neq 0)$ $= \dfrac{d}{dx} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^3} = \dfrac{\frac{e^{-1/x^2}}{x^3} \cdot x^3 - 3x^2 e^{-1/x^2}}{x^6} =$

$$\frac{1-3x^2}{x^6}e^{-1/x^2}\xrightarrow{x\to 0} 0 \quad (\text{VINCE } e^{-1/x^2})$$

$$\exists\ f''(0)=0$$

IN GENERALE $f^{(k)}(x)=\frac{P(x)}{x^{3k}}e^{-1/x^2}$ per un opportuno polinomio $P(x)$

$$\Rightarrow\ \exists\ f^{(k)}(0)=0$$

QUESTA FUNZIONE HA TUTTE LE DERIVATE NULLE IN $x=0$

PERÒ $f(x)\neq 0$ se $x\neq 0$

Se considero i coeff di Taylor trovo $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0\quad\forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \forall x$$

DUNQUE SERIE DI TAYLOR $\equiv 0 \neq f(x)$ se $x\neq 0$

PERÒ NEI "CASI SOLITI" (per le funzioni più comuni) tipo $f(x)=e^x$ / $\sin(x)$ / $\cos(x)$ / $\ln(1+x)$ / $(1+x)^2$ è VERO CHE la serie di Taylor — DOVE CONVERGE — CONVERGE A $f(x)$.

Per esempio $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{(2n+1)!}_{a_n}} x^{2n+1}$

DIM Uso la formula di Taylor con resto di Lagrange

$x>0$ $\quad \sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}}_{\text{SOMMA PARZIALE}} + \underbrace{\frac{f^{(2n+1)}(\xi_{n,x})\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{RESTO DI TAYLOR (SECONDO L.)}}$

$0 < \xi_{n,x} < x$

$$|\text{Resto}| = \frac{|\cos(\xi_{n,x})|\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

DUNQUE $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} \sin(x)$

(Lo stesso si può rifare per $\cos(x)$)

SE VOGLIO FARE LO STESSO PER $\ln(1+x)$, CIOÈ VOGLIO: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

POSSO PARTIRE DALLA SERIE GEOMETRICA

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$$

Posto $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

HO INTEGRATO TERMINE A TERMINE $g(x)$

vedo subito che il raggio di conv. è 1 $\left(\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1 \right)$

ed è chiaro (per i teoremi) che

$$f'(x) = g(x) \qquad \left(f \text{ è primitiva di } \frac{1}{1+x} \right)$$

DUNQUE $f(x) = \ln(1+x) + c$

Se prendo $x = 0$ vedo che $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1} \Big|_{x=0} = 0$

dunque $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$

CON GLI STESSI METODI TROVO

$$(1+x)^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{se} \qquad |x| < 1$$

dove $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

HO TROVATO ESPLICITAMENTE LA SOMMA DI ALCUNE SERIE
(senza passare per somme parziali)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

ESEMPIO (ESERCIZIO)

CALCOLARE $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = f(x)$

(1) $f(x)$ ESISTE (LA SERIE CONVERGE) se $|x| < \bar{R}$

dove $\bar{R} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ quindi $-1 < x < 1$

CERCO DI RICONDURMI A $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(= \frac{1}{1-x}\right)$

$-1 < x < 1$

Se derivo $g(x)$ trovo

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n}}_{h(x)} \qquad \left(h(x) = x g'(x) \right)$$

ANCHE $h(x)$ è definita in $]-1,1[$ ed è una serie di potenze

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{f(x)}{x}$$

IN DEFINITIVA

$$f(x) = x h'(x) \qquad e \qquad h(x) = x g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = \frac{(1-x)^2 - x \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$f(x)\left(=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n\right) = x\,Q'(x) = \boxed{\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1/2 \quad 3/2}{(1/2)^3} = \frac{3}{2}\,2^2 = 6 \quad ??$$

$\left(x=\frac{1}{2}\right)$

APPLICAZIONE DELLE SERIE DI POTENZE:

RISOLUZIONE "PER SERIE" DI UN'EQ. DIFF. LINEARE (NON A COEFF. COSTANTE) Per esempio:

$$(E) \quad x^2 y'' + y' + y = 0 \qquad \left(y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0\right)$$

- LINEARE, OMOGENEA, DI ORDINE 2, NON È IN FORMA NORMALE SU $\mathbb{R}$

(IL COEFF. DI y'' NON È sempre $\neq 0$)

NON POSSO APPLICARE IL TH. DI ESISTENZA PARTENDO DA $x_0=0$

IDEA: CERCO LE SOLUZIONI $y(x)$ di (E) come serie di potenze (CENTRATE IN ZERO), cioè cerco

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\text{con } a_n \text{ da determinare})$$

Se ciò è vero e se la $y(x)$ così definito converge in $]-R, R[$, allora posso derivare per serie da $-R$ e R $\Rightarrow$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$n-1=m \Rightarrow n=m+1$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$x^2y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n$$

QUINDI (E) DIVENTA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n n(n-1)+a_{n+1}(n+1)+a_n\Big)x^n=0$$

$\Leftarrow \quad a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1) + a_n = 0 \quad \forall n$

(è vero anche $\Rightarrow$ per un principio di annullamento:

se $\sum a_n x^n = 0 \Rightarrow a_n$ sono tutti nulli NE RIPARLIAMO)

CIOÈ $\quad a_{n+1}(n+1) + a_n(n^2 - n + 1) = 0 \quad \forall n \geq 0$

$\Updownarrow$

(R) $$\boxed{a_{n+1} = -\frac{n^2 - n + 1}{n+1} a_n \qquad \forall n \geq 0}$$

HO VISTO DUNQUE CHE $y = \sum a_n x^n$ RISOLVE (E)

$\Leftrightarrow$ gli a_n verificano (R) (e la serie di a_n CONVERGE DA QUALCHE PARTE)

(R) è una relazione ricorsiva che mi definisce tutti gli a_n per $n \geq 1$ una volta che sia assegnato (ad arbitrio) il termine $a_0 = y(0)$

PURTROPPO $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{n^2 - n + 1}{n+1} \right| \to \infty$ da cui

$\bar{R}$ = raggio di conv. $= 0$

$y(x)$ NON CONVERGE $\rightsquigarrow$ L'EQ. (E) NON HA SOLUZIONI

DOMANI VEDIAMO UN ESEMPIO PIÙ SIGNIFICATIVO