Analisi Matematica II
Lezione 38
7 marzo 2016

Serie di potenze.

Data $\boxed{(a_n)}$ successione di numeri reali (complessi)

considero la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

(se gli $a_n = 0$ da un certo $\bar{n}$ in poi $\Rightarrow$ ho un polinomio di grado $\bar{n}-1$)

Più in generale dovrei considerare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ — per semplicità prendo $x_0 = 0$

HO UNA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ dove $f_n(x) = a_n x^n$

CI CHIEDIAMO (1) Per quali x converge una serie di questo tipo
(2) che "regolarità" ha la somma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
(continuità / derivabilità)

(definita su $\{x :$ la serie converge$\}$

IL TUTTO DIPENDE DAI "COEFFICIENTI" a_n

(1) CONVERGENZA

Posto $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (ammesso che esista, se no si deve prendere il max lim)

e posto $\bar{R} = \frac{1}{L}$ (se $L=0$ $\bar{R}=+\infty$, se $L=+\infty$ $\bar{R}=0$)

(se $\bar{R}=0$ tutto ciò che segue è banale)

Allora la serie:

a) Converge puntualmente su ogni $x \in]-\bar{R}, \bar{R}[$ $(|x|<R)$

b) Non converge su ogni x fuori da $[-\bar{R}, \bar{R}]$ $(|x|>R)$

(non so dire niente su $x=\bar{R}$ e $x=-\bar{R}$)

(a') $\forall R<\bar{R}$ la serie converge totalmente su $[-R, R]$.

Dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge su un intervallo simmetrico

la cui ampiezza (dipende dagli a_n) vale $1/\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$

SE CI FOSSE x_0, tutto diventa $]x_0-\bar{R}, x_0+\bar{R}[$

<u>DIM.</u> Sia $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Sia $0 < R < \bar{R} = \frac{1}{L}$

Voglio dimostrare la <u>convergenza totale</u> della serie $\sum a_n x^n$ su $[-R,R]$.

Considero
$$M_n := \max_{-R \le x \le R} |a_n x^n| = \|f_n\|_{\infty,[-R,R]} \qquad (f_n(x) := a_n x^n)$$
$$= |a_n| R^n$$

Mi chiedo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ converge.

Applico il criterio della radice:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| R^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}\right) R = LR < L\bar{R} = 1$$

Dunque il criterio della radice funziona $\Rightarrow \sum_n \|f_n\|_{\infty,[-R,R]} < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie conv. tot. $\Rightarrow$ la serie conv. unif. su $[-R,R]$

$\forall R < \bar{R} = 1/L$ (da questo segue che la serie conv. pt. su $[-R,R]$ $\Rightarrow$ la serie conv. pt. su $]-\bar{R}, \bar{R}[$)

(b) Prendo x con $|x| > \bar{R} = \frac{1}{L}$ dico che non vale

$a_n x^n \to 0$

In effetti dal limite $\sqrt[n]{|a_n|} \to L \Rightarrow$

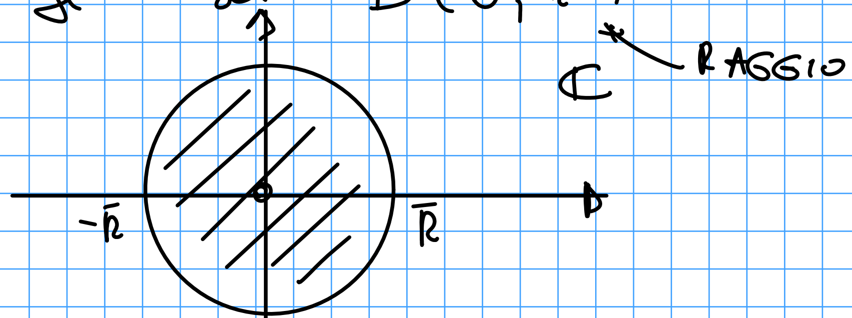
$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \to L|x| > 1$$

$$\Rightarrow |a_n x^n| \to +\infty$$

e quindi non può tendere a zero.

DEF. Il numero $\bar{R} = 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ si chiama "RAGGIO DI CONVERGENZA"

(Motivo del nome: se mi metto in $\mathbb{C}$, cioè $a_n \in \mathbb{C}$), troverei che la serie converge su $B(0, \bar{R})$



Per i teoremi visti sulle serie di funzioni HO:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{è}$$

(1) Definita su $]-\bar{R}, \bar{R}[$

(2) Continua in tale intervallo aperto

(3) Non converge fuori da $[-\bar{R}, \bar{R}]$

(non si può fare un teorema generale riguardo a $-\bar{R} / \bar{R}$)

ESEMPIO (ben noto) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (SERIE GEOMETRICA)

($a_n = 1 \quad \forall n$). Se uso quanto detto sopra:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{1} = 1$$

DUNQUE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ CONVERGE SU $]-1, 1[$

NON CONV. SU $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

In questo caso vedo anche che DIVERGE per $x = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$ / è indeterminata x $x = -1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

IN REALTÀ SAPPIAMO CHE

$$\sum_{n=0}^{K} x^n = \frac{x^{K+1}-1}{x-1} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{1-x} & \text{per } |x|<1 \\ \to +\infty & \text{per } x \geq 1 \\ \searrow \text{NON HA LIMITE} & \text{per } x \leq -1 \end{cases}$$

(TORNA CON QUANTO DETTO)

ALTRO ESEMPIO $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\quad \left(a_n = \frac{1}{n^2} \right)$

Se calcolo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 1$

(Perché - RICORDIAMO - $\sqrt[n]{n} \to 1$!!) . $\boxed{\text{RAGGIO DI CONV.} = 1}$

Stavolta la serie converge anche in ± 1 :

$\sum \frac{1}{n^2} < +\infty \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ CONV. (ASSOLUTAM.)

(si può vedere che la somma è continua su $[-1, 1]$)

ALTRO ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots$$

questo è una serie di potenze con

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

$\sqrt[n]{|a_n|}$ NON HA LIMITE IN QUANTO FA $\begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$

se vado vedere la def. di max lim. TROVO

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max(0, 1) = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge in $]-1, 1[$

(e non converge fuori). IN REALTÀ POSSO SCRIVERE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \leftarrow \text{SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE } -x^2$$

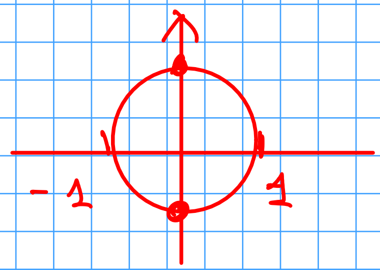
$\Rightarrow$ TROVO CHE TALE SERIE CONVERGE PER $|-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

e la sua somma è $\frac{1}{1+x^2}$ $\left(= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right)$

Se guardo la serie geom. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ mi spiego che converge solo su $]-1,1[$ con il fatto che in $x=1$ la funzione $\frac{1}{1-x}$ diverge.

MA la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ è "buona" su ogni $x \in \mathbb{R}$ — COME MAI LA SERIE CONVERGE SOLO SU $]-1,1[$

SE LA GUARDO IN $\mathbb{C}$ vedo che $\frac{1}{1+x^2}$ è singolare in $x = \pm i$



MI IMPEDISCE DI "ALLARGARMI"

L'ambiente naturale per studiare le serie di potenze sarebbe $\mathbb{C}$!!

- DERIVABILITÀ DELLE SERIE DI POTENZE ??

Dato $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, supposto che $\overline{R}>0$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|} \to L < +\infty\right)$

posso dire che $f(x)$ è derivabile su $]-\overline{R}, \overline{R}[$?

Posso "derivare per serie" $f'(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}}_{\text{ANCORA UNA SERIE DI POTENZE}}$??

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{n+1}(n+1)}_{b_n} x^n$$

FATTO Sia (a_n) una succ.

Poniamo $b_n = a_{n+1}(n+1)$

Allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(omesso da esistono - se non si usa il maxlim.)

INFATTI $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|} = \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\to 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}}_{\to L} \longrightarrow L$

(suppongo $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$)

$\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$ ha lo stesso limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\left(= \left(\underbrace{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}_{\downarrow\, L}\right)^{\overset{\frac{n}{n+1}}{\searrow 1}} \right)$$

IL RAGGIO DI CONV. DELLA SERIE DELLE DERIVATE

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ È LO STESSO DELLA SERIE DI

PARTENZA $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

TEOREMA Se (a_n) succ. con $\sqrt[n]{|a_n|} \to L < +\infty$

$(\bar{R} > 0) \Rightarrow$ la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è

definita su $]-\bar{R}, \bar{R}[$ ed è derivabile in questo

intervallo. Inoltre $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

DIM. Fisso R con $0 < R < \bar{R}$. So che entrambe le serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = g(x)$$

convergono unif. su $[-R, R]$. (e che la seconda è la serie delle derivate della prima). PER I TEOREMI SULLE SERIE DI FUNZIONI so CHE

f derivabile su $[-R, R]$ e $f'(x) = g(x)$

Dato che $R < \bar{R}$ è arbitrario dovrò la tesi (su $]-\bar{R}, \bar{R}[$) #

OVVIAMENTE posso iterare il ragionamento:

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ conv. su $]-\bar{R}, \bar{R}[$

$\Rightarrow$ f ha derivate di ogni ordine su $]-\bar{R}, \bar{R}[$ e vale

$$(*) \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ FATTORI}} x^{n-k} \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}$$

(si usa dire che f è di classe $C^{\infty}(]-\bar{R}, \bar{R}[\ )$)

OSSERVIAMO che se metto $x=0$ nella $(*)$

$$f^{(k)}(0) = (\text{rimane il termine } n=k) = a_k \, k(k-1) \cdots 1 = a_k \, k!$$

cioè $$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$ (coeff. di Taylor di ordine k della funzione $f(x)$)

RIASSUMENDO

$\boxed{\text{ASSEGNO LA succ. } (a_n)}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{COSTRUISCO } f(x) = a_0 + a_1 x + \dots}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{SCOPRO che } f(x) \text{ è } C^{\infty} \text{ su }]-\bar{R}, \bar{R}[}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{SCOPRO CHE } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$

(se avessi considerato $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ avrei trovato $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$)

DUNQUE, se f è somma di una serie di potenze $\Rightarrow$
f è somma della sua "serie di Taylor"

ALTRI ESEMPI

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$$

- RAGGIO DI CONV. $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 1 / \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1/\infty = 0$

$\Rightarrow \bar{R} = +\infty$

Per vedere che $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ posso usare il seguente criterio (CESARO). Se $a_n > 0$ e se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow$ $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

IN QUESTO CASO $a_n = n!$

Per calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ posso fare $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$
$\lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty$ #

DUNQUE $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

(e la serie conv. unif su ogni $[-R, R]$ con $R < +\infty$)

Inoltre posso derivare per serie:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

(m = n-1 poi m lo chiamo di nuovo n)

DUNQUE $\quad f'(x) = f(x) \quad$ e $\quad f(0) \, (= a_0) = 1$

$\Longrightarrow \quad f(x) = e^x$

POTREI DEFINIRE e^x come la somma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

QUESTO MODO È PROBABILMENTE IL MODO PIÙ "ECONOMICO" DI DEFINIRE e^x. Per esempio è quello più semplice per definire

e^{a+ib} (esponenziale complesso)

$\longrightarrow$ DOMANI . .