1. *$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è una funzione continua.*

2. *Si ha*
$$\int_A F(x)\,dx = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n(x)\,dx$$

3. *Se $A = I$ è un intervallo, se le f_n sono tutte derivabili con derivata continua e se anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in A} |f_n'(x)|$ è convergente allora F è derivabile e si ha*
$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \text{ in } I.$$

Dimostrazione. Per il teorema (2.4.2) la successione delle somme parziali (F_n) converge uniformemente a F e dunque il limite F è una funzione continua (dal teorema (2.1.8)). Inoltre, per il teorema (2.1.10)
$$\int_A F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_A F_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_A \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\,dx =$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_A f_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n(x)\,dx$$
(l'ultima eguaglianza è solo la definizione della convergenza della serie degli integrali). Infine l'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'\|_\infty$ implica, sempre per il teorema (2.4.2), che la serie delle f_n' è uniformemente convergente. Questo significa che le sue somme parziali $\sum_{k=1}^{n} f_k'$ convergono uniformemente ad una funzione continua G. Dato che $\sum_{k=1}^{n} f_k' = F_n'$ abbiamo che $F_n' \overset{unif}{\longrightarrow} G$. Per il teorema (2.1.12), ciò implica che F è derivabile e $F' = G$, cioè vale l'ultima affermazione. □

2.4.5 Esempio. Consideriamo la seguente successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da
$$f_n(x) := \frac{x}{1+n^2x^2}.$$
Si vede facilmente che
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0, \qquad f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$
Quindi il grafico di ogni f_n è quello rappresentato in figura 2.10.

In particolare f_n raggiunge il suo massimo in $x = \frac{1}{n}$ e il massimo di f_n vale $f_n(1/n) = 1/2n$. Dunque
$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$
e quindi $f_n \overset{unif}{\longrightarrow} 0$ (su tutto $\mathbb{R}$). Consideriamo ora la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

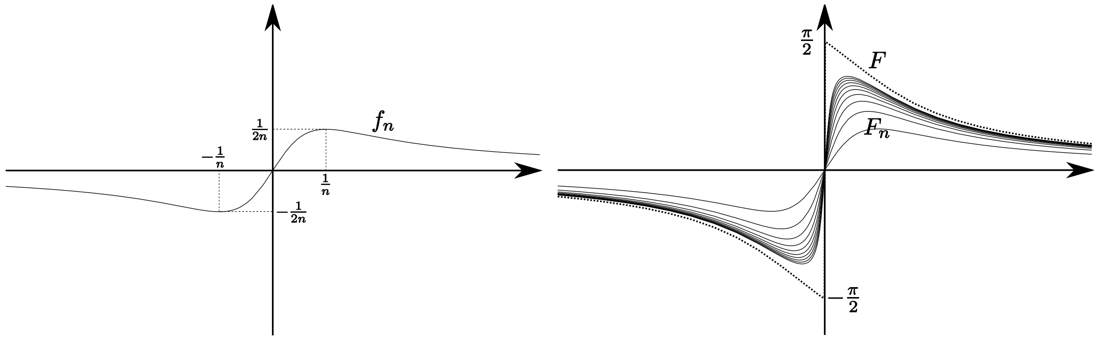

Figura 2.10: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

Studiamone la convergenza puntuale: fissato x in $\mathbb{R}$ vediamo se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

è convergente. Questo è vero per ogni x dato che, se $x = 0$ la serie ha tutti i suoi termini nulli, mentre se $x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2|x|}$$

e quindi la serie converge (dato che la serie $\frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge). Dunque ha senso scrivere

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

(x per x). Notiamo che $F(0) = 0$. Ci possiamo chiedere se F sia continua su tutto $\mathbb{R}$. Ciò sarebbe sicuramente vero se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} < +\infty$; sfortunatamente tale serie diverge essendo eguale a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ e quindi con questo ragionamento non si perviene a nulla. Se però fissiamo un qualunque $a > 0$ e consideriamo $A := [a, +\infty[$, si ha

$$\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \qquad \text{se } n \geq 1/a.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} = \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \sum_{n > 1/a} f_n(a) =$$
$$\sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \sum_{n > 1/a} \frac{a}{1+n^2a^2} \leq \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty,A} + \frac{1}{a} \sum_{n > 1/a} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Applicando il corollario 2.4.4 (in A) otteniamo che la serie converge uniformemente su A e la sua somma F risulta continua su A. Dato che il numero $a > 0$ è arbitrario ne deduciamo che f è continua su $]0, +\infty[$. Analogamente si dimostra che F è continua su $]-\infty, 0[$.

In maniera analoga possiamo dimostrare che F è derivabile su A e quindi è derivabile in ogni $x \neq 0$. Infatti consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n', \qquad \text{dove } f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha

$$\|f_n'\|_{\infty,A} = \sup_{x\geq a}\left|\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \sup_{x\geq a}\frac{1+n^2x^2}{n^4x^4} \leq \frac{1}{n^4a^4}+\frac{1}{n^2a^2}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4a^4}+\frac{1}{n^2a^2} < +\infty$ la serie delle derivate è uniformemente convergente su A e quindi tale serie è la derivata di F.

Vediamo che invece F non è continua in zero. Infatti se $0 < x < 1$ si ha [2]

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]}\frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]}\frac{x}{1+1} = \frac{1}{2}x\,[1/x] \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Questa disuguaglianza rende impossibile che $F(x) \to 0 = F(0)$ per $x \to 0^+$ e quindi F non è continua in zero (almeno da destra - si può anche ripetere lo stesso ragionamento per $x \to 0^-$).

In verità possiamo essere più precisi. Usando l'osservazione 1.2.12 possiamo scrivere $F(x) = \int_1^{+\infty}\frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy$ da cui

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+y^2x^2}\,dy \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty}\frac{x}{1+(y-1)^2x^2} = \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+y^2x^2}\,dy.$$

Sostituendo $t = xy$ si ricava

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\,dt$$

e facendo tendere x a zero si ricava

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

La figura 2.10 rappresenta le somme parziali fino all'ordine 10 delle f_n e, con linea tratteggiata, la somma della serie (in realtà la somma di ordine $n = 5000$).

2.5 Applicazioni lineari continue

2.5.1 Definizione. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali normati e indichiamo le loro norme con $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ rispettivamente. Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{X}_1$ e x_0 un punto di A e sia F una funzione (o applicazione) da A in $\mathbb{X}_2$, (in breve $f : A \to \mathbb{X}_2$).
Diremo che F è continua in x_0 se per ogni successione (a_n) di punti di A tale che $a_n \to x_0$ (in $\mathbb{X}_1$) succede che $F(a_n) \to F(x_0)$ (in $\mathbb{X}_2$). Diremo che F è continua in A se F è continua in tutti i punti di A.

È facile vedere che valgono le seguenti proprietà (standard).

2.5.2 Proposizione. *1. Se F è continua in x_0 allora F è limitata in un intorno di x_0, cioè esistono un raggio $r > 0$ ed un numero M tali che*

$$\|F(x)\|_2 \leq M \qquad \forall x \in A\colon \|x - x_0\|_1 \leq r$$

[2]ricordiamo che $[t]$ indica la parte intera di un numero t, definita da $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$; ne segue allora che $[t]$ è un intero e che $[t] \leq t < [t] + 1$