Analisi Matematica II
Lezione 36
1 marzo 2016

<u>Def.</u> $f_n : A \to \mathbb{R}$ (succ. di funzioni) $f: A \to \mathbb{R}$

$(A \subset \mathbb{R}^N)$

- <u>convergenza puntuale</u> $f_n \xrightarrow{pt.} f$ (su A) se

$\forall x \in A \qquad f_n(x) \to f(x)$

- Conv. unif. Posto $\| f \|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} \| f(x) \|$ (per f generica)

($= \max_{x \in A} \| f(x) \|$ se f continua e A limitato e chiuso)

dico che $f_n \xrightarrow{UNIF} f$ (su A) se

$\| f_n - f \|_{\infty, A} \to 0$

$\bar{n}$ dipende solo da ε e non da x

($\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall x \in A \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \| f(x) - f_n(x) \| < \varepsilon$)

(la velocità con cui $f_n(x) \to f(x)$ non dipende da x)

TEOREMI Se $f_n \to f$ UNIF. SU A, allora

- $f_n \to f$ puntualmente su A
- Se f_n sono continue $\Rightarrow$ f continua

DUNQUE $$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

SE x_0 è pto di accumulazione per A; anche $x_0 = \pm\infty$

(per esempio se $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$)

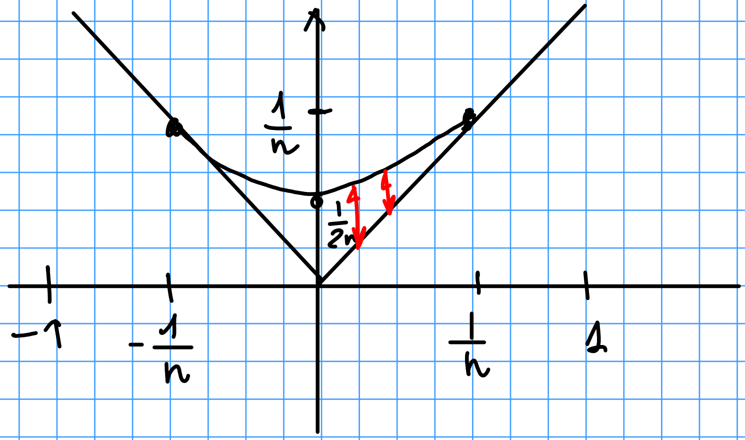
- Se $A = [a,b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$ (INTERVALLO LIMITATO)

allora $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

DUNQUE $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

LA CONV. UNIF. NON RISPETTA LA DERIVATA:

Esempio



$A = [-1,1] \qquad f(x) = |x|$

(f NON È DERIVABILE IN ZERO)

Dato $n \in \mathbb{N}$ considero

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ \dfrac{nx^2}{2} + \dfrac{1}{2n} & x \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ -x & \text{se } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

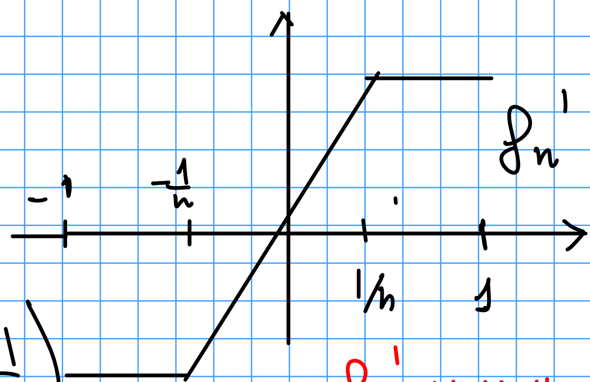
$f_n = a x^2 + b$ IMPONENDO $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ $\quad f'\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{n^2} + b = \frac{1}{n} \qquad \frac{2a}{n} = 1 \qquad a = \frac{n}{2} \qquad b = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

ALLORA f_n È DERIVABILE IN $[-1,1]$

Inoltre $\|f_n - f\|_{\infty, A} = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| =$

$$\max_{-\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}} \left| \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| \right| = \max_{0 \le x \le \frac{1}{n}} \left(\frac{nx^2}{2} - x + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n}$$



f_n' NON HA limite unif.

DUNQUE $\quad \| f_n - f \|_{\infty, A} = \frac{1}{2n} \to 0$ per $n \to \infty$ cioè

f_n converge uniformemente a f su $[-1,1]$

MA f_n è derivabile $\forall n$ mentre f non lo è

IN GENERALE, ANCHE se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ NON POSSO SCRIVERE

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

PERÒ posso "recuperare" .... aggiungendo un'ipotesi

TEOREMA (CONV. UNIF E DERIVATA)

SUPPONIAMO $f_n : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) f_n derivabili in I

SUPPONIAMO

(1) $f_n \to f$ puntualmente su I

(2) $f'_n \to g$ uniformemente su I

(per due opportune funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$)

ALLORA f è DERIVABILE e $f' = g$

(se le derivate f_n' convergono unif. a qualcosa $\Rightarrow$ quel qualcosa è f')

DIM. USO QUESTO (conseguenza del teor. fond. calcolo int.)

Supposte f e g continue, allora

$$\boxed{f \text{ è derivabile e } f' = g \iff \int_a^b g(t)\,dt = f(b) - f(a) \quad \forall a, b \in I}$$

(se $f' = g \Rightarrow f$ è primitiva di $g \Rightarrow$

$$\circledast \quad \int_a^b g(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

viceversa se vale la formula $\circledast$, $\quad f(x) = \int_a^x g(t)\,dt - f(a)$

$\Rightarrow$ so che $f'(x) = g$ ...)

DUNQUE BASTA DIM $\quad \int_a^b g(t)\,dt = f(b) - f(a) \quad \forall a, b \in I$

so che "la formula è vera per n" cioè

$$\int_a^b f_n'(t)\,dt = f_n(b) - f_n(a)$$ (perché f_n è derivabile)

PASSO al limite per $n \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(b) \to f(b) \\ f_n(a) \to f(a) \end{array}\right\} \text{ perché } f_n \text{ converge } \underline{\text{pt}} \text{ a } f$$

$$\int_a^b f'_n(t)\,dt \to \int_a^b g(t)\,dt \qquad \text{perché } f'_n \to g \ \underline{\text{unif.}}$$

$\Rightarrow$ TESI

DUNQUE se f'_n converge unif (a qualcosa)

e f_n converge puntualmente POSSO SCRIVERE

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

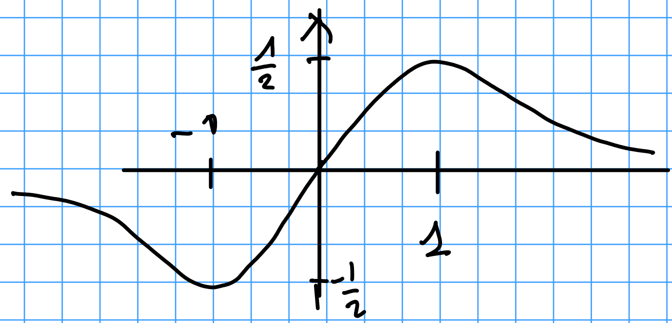
POSSO SCAMBIARE LIMITE E DERIVATA

(nell'esempio di prima non è vero che f'_n ha limite uniforme

In effetti $f'_n \to g$ PUNTUALMENTE con $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

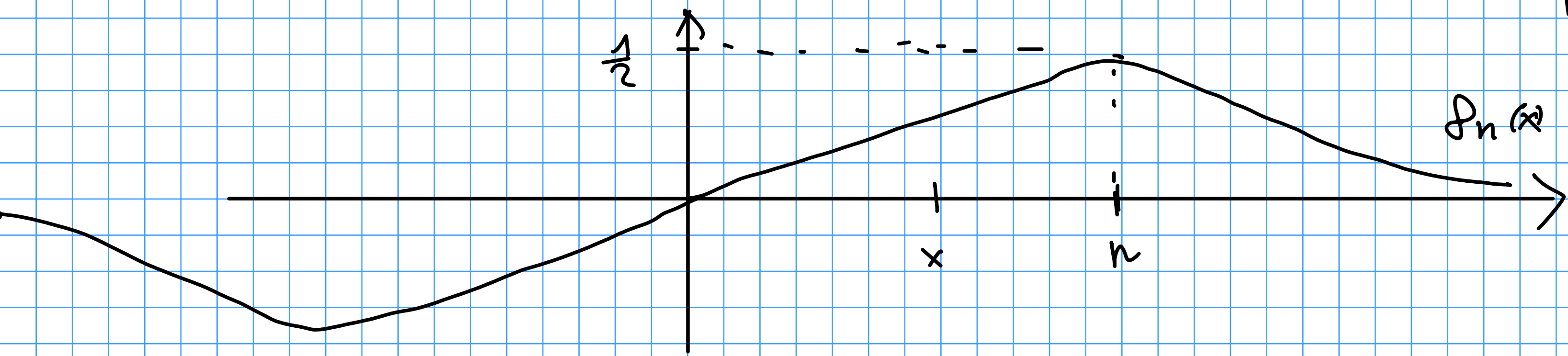
e quindi g discontinua $\Rightarrow$ f_n' non possono convergere unif.

ESEMPIO $\quad h(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



$$h'(x) = \frac{1+x^2-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

PONGO $\quad f_n(x) = h\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{x/n}{1+x^2/n^2} = \dfrac{\frac{x}{n}}{\frac{n^2+x^2}{n^2}} = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$



DOMANDE $\quad$ CONV. PT. / CONV. UNIF. DI f_n a qualcosa.

(a) conv. puntuale: fissato x $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot x}{n^2+x^2} = 0$

(b) è vero che $f_n \to 0$ UNIF. (su $\mathbb{R}$) ?? $\quad$ NO

Se calcolo $\| f_n - f \|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} | f_n(x) - 0 | =$

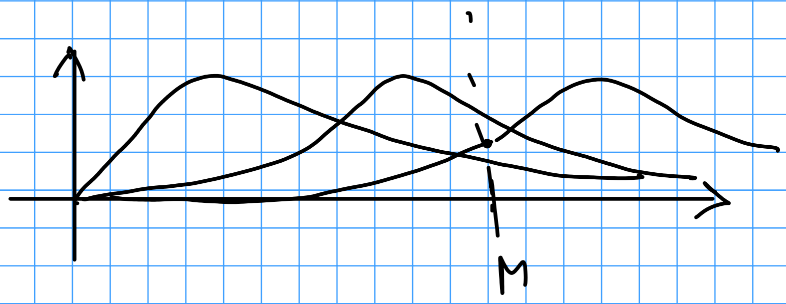
$\max_{x \geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2}$ NON TENDE A ZERO

PERÒ FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO $M>0$ HO

$f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE SU $[-M, M]$

Infatti, se M è fissato,

$\| f_n - 0 \|_{\infty, [-M,M]} = \max_{-M \leq x \leq M} | f_n(x) | = \max_{[0,M]} f_n(x)$



Se $n \geq M \Rightarrow$ il punto di max $(x=n)$ esce da $[0,M]$

$\Rightarrow$ il massimo si realizza in $x = M$ DUNQUE

$$\| f_n - 0 \|_{\infty, [-M,M]} = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n \leq M \\ f_n(M) & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| f_n - 0 \|_{\infty,[-M,M]} = \lim_{n\to\infty} f_n(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{nM}{n^2+M^2} = 0$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. su $[-M, M]$.

SERIE DI FUNZIONI

Def. Ho una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$ e voglio considerare $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $(n=0)$

- dico che la serie converge puntualmente su A se $\forall x \in A$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Questo si traduce: posto $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ (somme parziali) si ha S_n converge puntualmente a una $S(x)$

- dico che la serie converge uniformemente su A se S_n converge uniformente a S

TEOREMI (ottenuti dai corrispondenti sulle successioni di funzioni)

- Se $\sum_n f_n$ conv. unif $\Rightarrow$ $\sum_n f_n$ conv. pt.
- Se $\sum_n f_n$ conv. unif e f_n sono continue $\Rightarrow$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{è CONTINUA}$$

- Se $\sum_n f_n$ conv. unif su $[a,b]$ (limitato), f_n continue $\Rightarrow$

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n(x) \right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)\, dx$$

- Se f_n derivabili e se $\sum_n f_n$ e $\sum_n f_n'$ convergono unif (per la prima basta la conv. pt.) $\Rightarrow$ la somma $S(x) = \sum_n f_n(x)$ è derivabile e

$$S'(x) = \sum_n f_n'(x)$$

(se manca l'ipotesi di conv. unif. tutte queste proprietà possono cadere)

TEOREMA Siano $f_n : A \to \mathbb{R}$. Ricordo che

$$\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$$

SE LA SERIE NUMERICA $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} < +\infty$

(è una serie a termini positivi!!) $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONVERGE UNIF. SU A

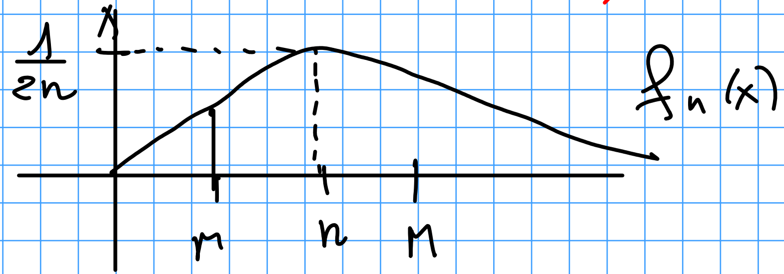
(si usa dire che la serie delle f_n converge TOTALMENTE:

$\sum_n f_n$ CONV. TOTALMENTE $\Rightarrow$ $\sum_n f_n$ CONV. UNIF.)

ESEMPIO $f_n = \dfrac{x}{n^2+x^2}$

su $[0,+\infty[$

(VEDI I CALCOLI DI PRIMA)



VOGLIO TROVARE LE PROPRIETÀ DI $S(x) = \sum_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^2+x^2}$

(1) Per quali $X \geq 0$ esiste $S(x)$. (è un problema di serie numeriche, a x FISSATO. CIOÈ DI CONV. PT.)

Noto che il termine $\underset{\substack{\shortparallel \\ a_n}}{\dfrac{X}{n^2+x^2}} \simeq \underset{\substack{\shortparallel \\ b_n}}{\dfrac{X}{n^2}}$. Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\Rightarrow S(x)$ è definita $\forall x \geq 0$

(2) Per quali x_0 (se ce ne sono) S è continua in x_0

QUI ENTRA IN GIOCO LA CONV. UNIF. $\Leftarrow$ $\boxed{\text{CONV. TOTALE}}$

($\Rightarrow$ NON VALE)

Devo vedere se $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{x}{n^2+x^2}$$

(sto usando $\|f\|_{\infty [0,+\infty[}$)

$$= \max_{x \geq 0} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{1}{2n}$$

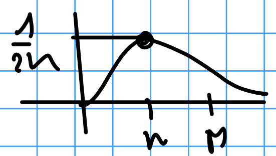
NON È BUONO $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$

NON C'È CONV. TOTALE SU $\mathbb{R}$!!!

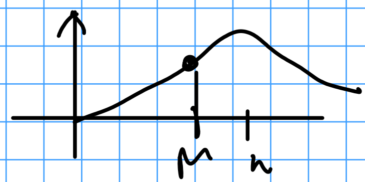
Rinuncio alla conv totale su tutto $\mathbb{R}$ e fissato $M>0$ guardo cosa succede su $[0,M]$

$$\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \max_{0\le x\le M} \frac{x}{n^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{se } n\le M \\[2ex] \dfrac{M}{n^2+M^2} & \text{se } n>M \end{cases}$$

(si ragiona come nell'esempio precedente)



$n \le M$



$$\sum_{n=1} \|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \underbrace{\sum_{n\le M} \frac{1}{2n}}_{\text{NUMERO FINITO DI TERMINI}} + \underbrace{\sum_{n>M} \frac{M}{n^2+M^2}}_{\text{CONVERGE}}$$

$$\frac{M}{n^2+M^2} \sim \frac{M}{n^2}$$

$\Rightarrow$ CONV. TOTALE SU $[0,M]$ $\Rightarrow$

$\sum f_n$ CONV. UNIF. SU $[0,M]$ $\Rightarrow$

S È CONTINUA SU $[0,M]$ $\forall M>0$

$\Rightarrow$ S È CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$\left(S(x) = \sum \frac{x}{n^2+x^2} \right)$

(3) DOMANDA (NON BANALE): POSSO DIRE CHE $\sum_n f_n$ CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$

(So già che NON conv. totalmente, ma non mi serve)

SE AVESSI LA CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+n^2} = 0$$

SE FACCIO VEDERE CHE $S(x) \not\to 0$ all'infinito

$\Rightarrow$ NON C'È CONV. UNIF.

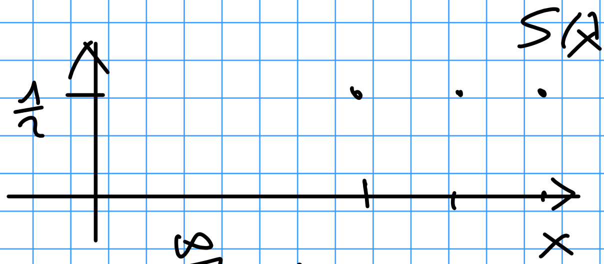
IN EFFETTI prendo $m \in \mathbb{N}$

$$S(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{m^2+m^2} = \frac{m}{2m^2}\cdot m = \frac{1}{2}$$

$n \leq m \Rightarrow n^2 \leq m^2$

DUNQUE (se m è intero)

$$S(m) \geq \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERE $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = 0$