Analisi Matematica II
Lezione 34
16 dicembre 2015

INTEGRALI IMPROPRI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

IDEA: dato $F(x,y)$ $x \in A$, $y \in B$ considero

$$f(x) = \int_B F(x,y)\, dy$$

e mi chiedo se

(1) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \int_B F(x_0, y)\, dy$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0, y)\, dy$$

SI È VISTO CHE (1) e (2) VALGONO quando gli integrali sono "secondo Riemann" (B limitato ; F continua nelle due variabile)

NEL CASO DI INTEGRALI IMPROPRI LA TESI NON VALE (in generale) : "NON SI PUÒ PORTARE IL LIMITE DENTRO L'INTEGRALE IMPROPRIO" Vediamo un esempio

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dy}{1+x^2y^2} \qquad \left(F(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2} \right)$$

$F(x,y)$ è ben definita ed è continua su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

e se fisso x $\quad y \mapsto \dfrac{x}{1+x^2y^2}$ è integrabile su $[0,+\infty[$

($\Rightarrow$ $f(x)$ ha senso $\forall x \in \mathbb{R}$) **NOTA** $f(0)=0$

Se funzionasse il teorema potrei scrivere

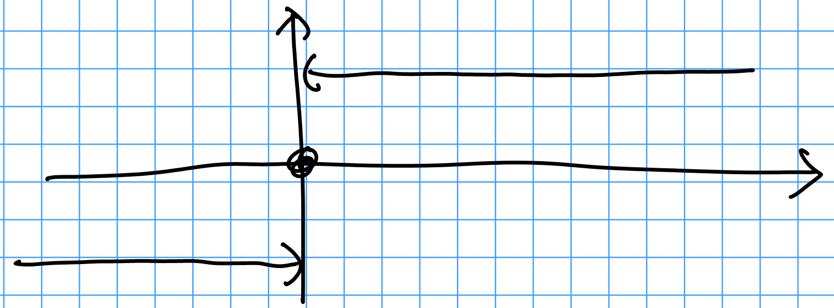
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{x\,dy}{1+x^2y^2} = f(0) = 0$$

PERÒ, se pongo $xy = s$, (PRENDO $x>0$) $\Rightarrow$

$$x\,dy = ds \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(s)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(se $x<0$ trovo $-\frac{\pi}{2}$)

Dunque



da cui si vede che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$ / $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$

NONOSTANTE $F(x,y)$ sia continua rispetto a (x,y)
la $f(x) = \int_0^{+\infty} F(x,y)\,dy$ risulta discontinua in $x=0$

MI SERVONO ALTRE IPOTESI

<u>TEOREMA</u> A dominio reg. di $\mathbb{R}^N$, B dominio regolare aperto di $\mathbb{R}^M$ $F: A\times B \to \mathbb{R}$ continua

(non chiedo B limitato). SUPPONGO che esista
$g: B \to \mathbb{R}$ $(g = g(y))$ tale che

$$(**)\begin{cases} \bullet \quad |F(x,y)| \le g(y) \quad \forall\, x\in A \ \forall\, y\in B \\ \bullet \quad g \text{ sia integrabile (in s.i.) su } B \end{cases}$$

(è importante che g NON DIPENDE da x)

DA QUESTE IPOTESI SEGUE che $\forall x \in A$ è ben definita

$$f(x) := \int_B F(x,y)\,dy$$

[in fatti dalla dis. segue che $\int_B |F(x,y)|\,dy < +\infty$
e da questo segue che $y \mapsto F(x,y)$ è integrabile (in s.i.)
su B $\forall x$]

TESI $\quad f(x)$ è continua (rispetto a x) su A

Inoltre se OLTRE A QUANTO SOPRA esiste $\dfrac{\partial}{\partial x_i} F(x,y)$, è continua ed

esiste $g_1 : B \to \mathbb{R}$ integrabile tale che

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} F(x,y) \right| \le g_1(y)$$

ALLORA $f(x)$ è derivabile rispetto a x_i e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} F(x,y)\, dy$$

VEDIAMO PRIMA DI TUTTO che nel controesempio di prima non è possibile trovare nessuna g come sopra.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\, dy}{1+x^2y^2}$$

VEDIAMO CHE $F(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2y^2}$ non verifica $(\ast\ast)$

cioè non è possibile trovare $g(y)$ integrabile su $[0,+\infty[$ per cui

$$\frac{x}{1+x^2y^2} \leq g(y) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \forall y \geq 0$$

(Prendo, per esempio, $A = [0,1]$)

IN SOSTANZA per ogni x ho una $f_x(y)$ che è integrabile rispetto a y su $[0,+\infty[$, ma queste f_x non sono tutte "sotto una stessa g"

Se ci fosse una tale g $\Rightarrow$

$$\forall y>0 \qquad \max_{0\le x\le 1} \frac{x}{1+x^2y^2} \le g(y)$$

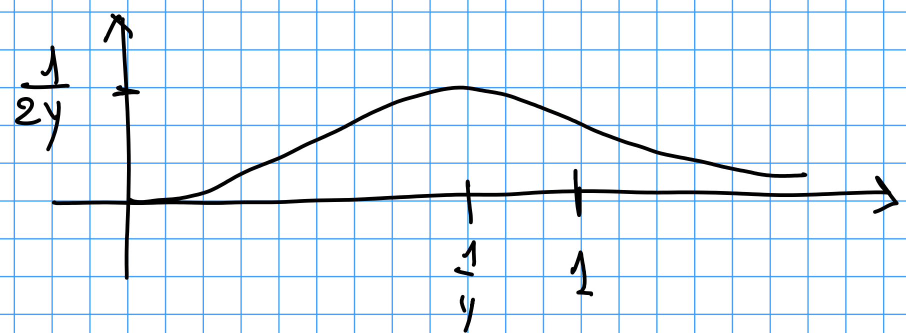
CALCOLIAMO (a y fissato) Derivo rispetto a x $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{1+x^2y^2} = \frac{1+x^2y^2 - x\,2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

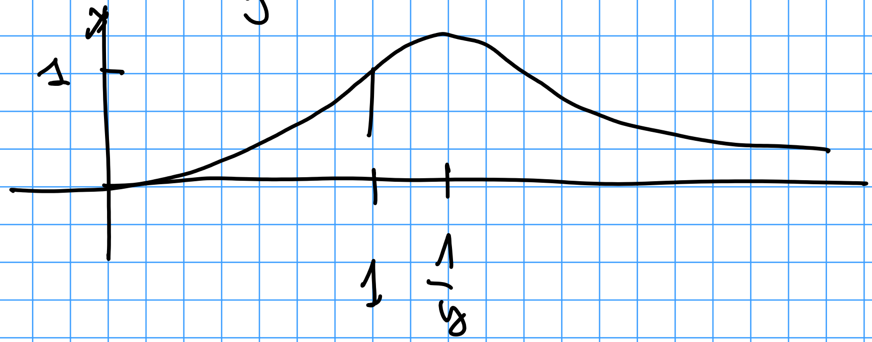
Questa derivata fa zero se $x = \frac{1}{y}$ $\Rightarrow$

DUE POSSIBILITÀ:

(a) $0<\frac{1}{y}\le 1 \Rightarrow \frac{1}{y}$ è pto di max $\Rightarrow \max\limits_{0\le x\le 1} = \dfrac{1/y}{1+1} = \dfrac{1}{2y}$



(b) $\frac{1}{y} \geq 1$



il max si realizza per

$x = 1 \Rightarrow$

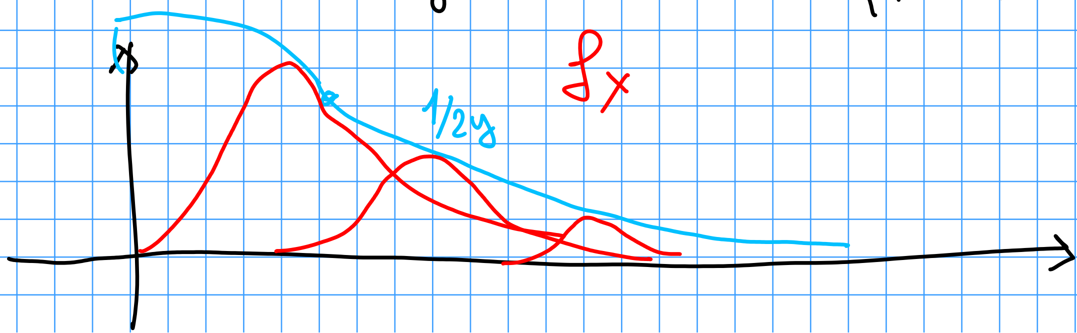
$\max = \frac{1}{1+y^2}$

DUNQUE AVREI

$$g(y) \geq \begin{cases} \frac{1}{2y} & \text{se } y \geq 1 \\ \frac{1}{1+y^2} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

UNA TALE g NON può essere integrabile in y perché

$\frac{1}{2y}$ NON è integrabile su $[1, +\infty[$



L'INVILUPPO DELLE $f_x(y)$ "descrive" una funzione NON integrabile $\Rightarrow$ il TEOREMA FALLISCE

VEDIAMO DEGLI ESEMPI "POSITIVI"

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy$$

<u>**DOMANDE**</u> (a) f è continua in x ? (per quali x?)

(b) f è derivabile in x ? (per quali x?)

$F(x,y) = e^{-xy^2}$ È CONTINUO IN (x,y)

Per la (a) mi serve una $g(y)$ integrabile su $[0,+\infty[$ tale che

$$e^{-xy^2} \leq g(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \geq 0$$

(se voglio la continuità di f in un punto x_0 mi serve A intorno di x_0)

OSS. Se $0 \in A$ la g non esiste. Se posso mettere $x=0$ $\Rightarrow$ $e^{-0y^2} \leq g(y) \iff 1 \leq g(y)$

(g non può essere integrabile su $[0,+\infty[$)

DEVO "SCANSARE" $x=0$ (problema se $x=0$ la f vale $+\infty$)

Allora fisso $\varepsilon>0$ e prendo $A = [\varepsilon, +\infty[= \{x \geq \varepsilon\}$

e vedo se trovo g integrabile per cui

$$e^{-xy^2} \leq g(y) \qquad \forall x \geq \varepsilon \quad \forall y \geq 0$$

BASTA prendere $g(y) := e^{-\varepsilon y^2}$

TORNA $\Rightarrow$ $f(x)$ è continua su $\{x \geq \varepsilon\}$

e dato che $\varepsilon>0$ è arbitrario deduco

$f(x)$ è continua per ogni $x>0$

cioè ...

Dato $x_0>0$ $\lim_{x\to x_0} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x_0 y^2}\,dy$

VEDIAMO LA questione (b) (derivabilità)

MI SERVE una g_1 integrabile tale che

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-xy^2} \right| \leq g_1(y) \qquad \forall x \in A \quad \forall y \geq 0$$

COME PRIMA prendo $A = \{ x \geq \varepsilon \}$ dove $\varepsilon > 0$.

$$\left| -y^2 e^{-xy^2} \right| \leq g_1(y) \qquad \forall x \geq \varepsilon \quad \forall y \geq 0$$

POSSO prendere $g_1(y) = y^2 e^{-\varepsilon y^2}$ che è integrabile dato che e^{-y^2} "VINCE"

DUNQUE POSSO APPLICARE IL TEOREMA $\Longrightarrow$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -y^2 e^{-xy^2}\,dy$$

Posso fare un'integrazione per parti:

$$-y^2 e^{-xy^2} = \frac{y}{2x}\Big(\underbrace{-2xy\, e^{-xy^2}}_{\frac{d}{dy} e^{-xy^2}}\Big) \implies$$

$$f'(x) = \left[\frac{y}{2x} e^{-xy^2}\right]_{y=0}^{y=+\infty} - \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy = -\frac{1}{2x} f(x)$$

QUINDI $f(x)$ verifica l'eq. di ff $\qquad g' = -\frac{y}{2x}$

$$\implies f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} = \frac{f(1)}{\sqrt{x}} \qquad (c = f(1))$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

IN REALTÀ PER OTTENERE LA FORMULA BASTAVA

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \qquad \sqrt{x}\, y = s \qquad dy = \frac{ds}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

ALTRO ESEMPIO: la funzione Γ $\left(: \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R} \right)$

Def Dato $s>0$ definisco

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

$\Gamma(s)$ è ben definita perché

x^{s-1} è integrabile
- su $[1,+\infty[$ a causa di e^{-x}
- su $[0,1]$ a causa di x^{s-1} dato che $s-1>-1$

APPLICO IL TEOREMA:

(a) Fisso $0<\varepsilon<M<+\infty$ e cerco g integrabile tale che

$$x^{s-1} e^{-x} \le g(x) \quad \forall s \in [\varepsilon, M] \quad \forall x \geq 0$$

Tale g esiste: basta definire

$$g(x) = \begin{cases} x^{M-1} e^{-x} & \text{se } x \geq 1 \\ x^{\varepsilon-1} e^{-x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

g è integrabile (lo è separatamente su $]0,1]$ e su $[1,+\infty[$

$\Rightarrow$ $\Gamma(s)$ è continua per $\varepsilon \leq s \leq M$

Essendo $\varepsilon > 0$ e $M > \varepsilon$ arbitrari $\Rightarrow$ $\Gamma(s)$ è continua su ogni $s > 0$

ANALOGAMENTE dimostro che Γ è derivabile e che

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{s-1} \ln(x)}_{\frac{d}{ds} x^{s-1}} e^{-x} \, dx$$

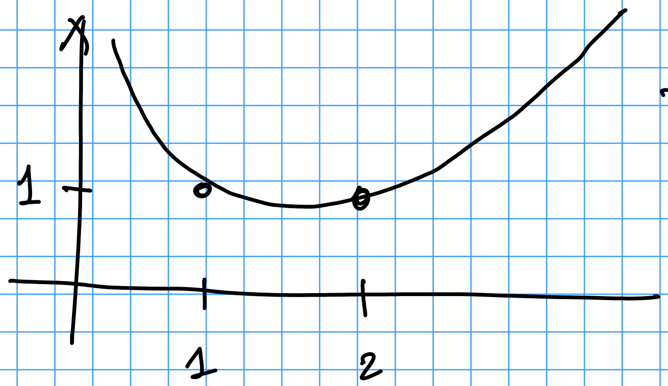
IN effetti trovo una g_1 integrabile tale che

$$\left| x^{s-1} \ln(x) \, e^{-x} \right| \leq g_1(x) \qquad \text{se } \begin{array}{l} \varepsilon \leq s \leq M \\ x > 0 \end{array}$$

e si può derivare ulteriormente:

$$\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln^2(x)\, e^{-x}\, dx \quad (\geq 0)$$

Γ è convessa (si può vedere che $\Gamma'(1) < 0$ e $\Gamma'(2) > 0$ $\Rightarrow$ c'è un pto di minimo tra 1 e 2



$\Gamma(s)$

Si vede anche che $\lim_{s\to 0^+} \Gamma(s) = +\infty$

, $\lim_{s\to+\infty} \Gamma(s) = +\infty$

- Vediamo $\Gamma(1) = ??$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0 - -1 = 1$$

– Calcoliamo $\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}\, dx$ = (per parti)

$$\underbrace{x^s(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}}_{=0 \text{ perché } s>0} + \int_0^{+\infty} s\, x^{s-1} e^{-x}\, dx = s\,\Gamma(s)$$

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \qquad \forall s>0}$$

– DEDUCO DA $\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{se } n \geq 1$$

$\Gamma(1) = 0$, $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2$

$\ldots\ \Gamma(n+1) = n!$

La Γ estende il fattoriale su $]0,+\infty[$ mantenendo la formula $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $\forall s>0$.

Per i teoremi di derivazione sotto il segno di int. $\Longrightarrow$

$\Gamma(s)$ è infinitamente derivabile e

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \ln^k(s)\, e^{-x}\, dx$$

- ultima curiosità $s = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\, dx$$

sostituisco $x = y^2 \Leftrightarrow dx = 2y\, dy$ e trovo

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} 2y\, e^{-y^2}\, dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$$

$\leadsto$ $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ ....

QUESTA Γ compare in tante formule