Analisi Matematica II
Lezione 33
15 dicembre 2015

<u>Proprietà</u> degli int. impropri

<u>TEOREMA</u> (teorema di confronto)

A dominio regolare di $\mathbb{R}^N$ (aperto)
$f, g : A \to \mathbb{R}$ continue
$\Rightarrow$ (f_n / g_n integrabili su A_n secondo Riemann)

SE $0 \leq f \leq g$ e g è integrabile in senso improprio su A $\Rightarrow$ f " " " " " " " " su A

<u>DIM.</u> <u>Sicuramente esiste $\int_A f(x)\,dx$</u>(*) (eventualmente $+\infty$)

D'altra parte $\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx < +\infty$

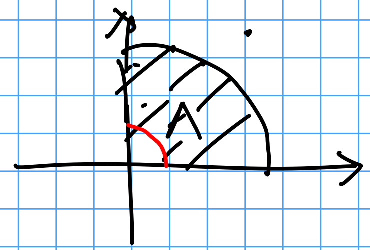
$\Rightarrow \int_A f(x)\,dx < +\infty$, cioè f è integrabile su A.

(*) per come è stato definito $\int_A f(x)\,dx$, quando $f \geq 0$

PER ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x^2+y^2} \quad \text{è integrabile su } A$$

$$A = \{ x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2+y^2 \leq 1 \}$$

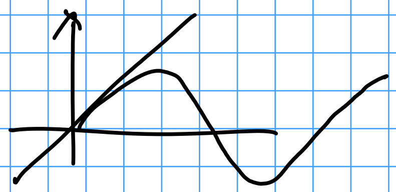


NOTO CHE $\quad 0 \leq x \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\qquad\qquad\quad\; 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ per tutte le $(x,y) \in A$

$$\Rightarrow \quad x+y \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \sin(x+y) \leq \sin\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right) \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

($\sin(t) \leq t$



, per $t \geq 0$)

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x,y) \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(la disuguaglianza di sinistra vale se $0 \leq x+y \leq \pi$

e questo è vero in A, dato che $0 \leq x+y \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2 < \pi$)

ALLORA BASTA VEDERE SE $\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = g(x,y)$ è

integrabile su A (è già stato visto, ma rifaccio i conti)

$$\iint_A g(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{(coordinate polari)}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \cancel{\rho}\, d\rho\, \frac{2}{\cancel{\rho}} =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi < +\infty$$

DUNQUE g è integrabile

$\Longrightarrow$ f è integrabile.

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

- SIANO DATI $A \subset \mathbb{R}^N$ $B \subset \mathbb{R}^M$ domini regolari, B limitato e chiuso.
- $F : A \times B \to \mathbb{R}$ continua (nelle due variabili)

$\Longrightarrow$ È BEN DEFINITA

$$f(\cancel{x}) := \int_B F(\cancel{x}, \cancel{y})\, d\cancel{y} \qquad (\forall x \in A)$$

(sto facendo l'integrale secondo Riemann)

TESI) $f(x)$ è continua su A, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \int_B F(x,y)\, dy = \int_B \lim_{x \to x_0} F(x,y)\, dy$$

(a rigore $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \int_B F(x_0, y)\, dy \quad \forall x_0 \in A$

Dunque il teorema dice che posso "portare il limite dentro l'integrale" $\leftarrow$ "fare il "limite sotto il segno di int."

dato $i = 1 \ldots N$

INOLTRE se $\forall$ esiste $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x,y)$ e questo è continuo su $A \times B$ (continuo rispetto a (x,y))

$\Longrightarrow$ $f(x)$ è derivabile rispetto a x_i e si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} F(x,y)\,dy$$

"SI PUÒ DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE"

<u>NOTA</u> Nelle ipotesi fatte $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ è continua in x per la prima parte del teorema

ESEMPIO DI UTILIZZO DI QUESTO TEOREMA.

$$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Voglio considerare $f(x) = \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \int_0^1 F(x,y)\,dy$

DUNQUE $B = [0,1]$

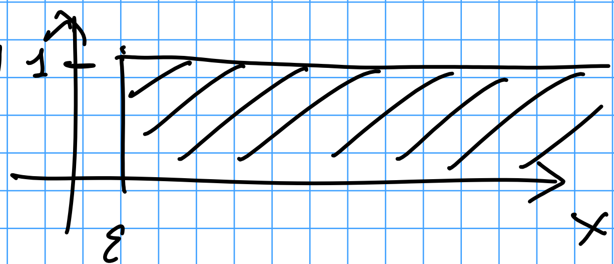
Posso prendere $A = [\varepsilon, +\infty[$ (A è chiuso in $\mathbb{R}$)

dove $\varepsilon > 0$ ($A = \{x \geq \varepsilon\}$) ($\varepsilon$ qualunque purché >0)

Non posso prendere $A =]0, +\infty[$ perché se facessi

Così $\frac{1}{x^2+y^2}$ non sarebbe continua su $A \times B$

(VISTO CHE $\frac{1}{x^2+y^2}$ NON è definita in $(0,0)$)



$$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$ è continua su $\{x \geq \varepsilon,\ 0 \leq y \leq 1\}$
$= A \times B$

Posso considerare

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}.$$ Per il teorema f è continua.

Lo posso anche verificare calcolando esplicitamente $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \qquad \frac{y}{x} = s \qquad dy = x\,ds$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^{1/x} \frac{x\,ds}{1+s^2} = \frac{1}{x}\int_0^{1/x}\frac{ds}{1+s^2} = \dots$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\arctan(s)\Big]_0^{1/x} = \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

che è continuo su $[\varepsilon, +\infty[$

(dato che ε è arbitrario, ricavo che f è continua $\forall x_0 > 0$)

USIAMO LA II^a parte del teorema:

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x^2+y^2}\,dy$$

(si vede che le ipotesi sono verificate,)

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -2x\int_0^1 \frac{dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x^2}$$

SE DIVIDO PER $-2X$ TROVO

$$\int_0^1 \frac{dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2x^3}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2}\,\frac{1}{1+x^2}$$

HO CALCOLATO L'INTEGRALE. Se per esempio $x=1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan(1) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

POTREI ITERARE IL PROCEDIMENTO E TROVARE UNA FORMULA PER

$$\int_0^1 \frac{dy}{(x^2+y^2)^n}$$