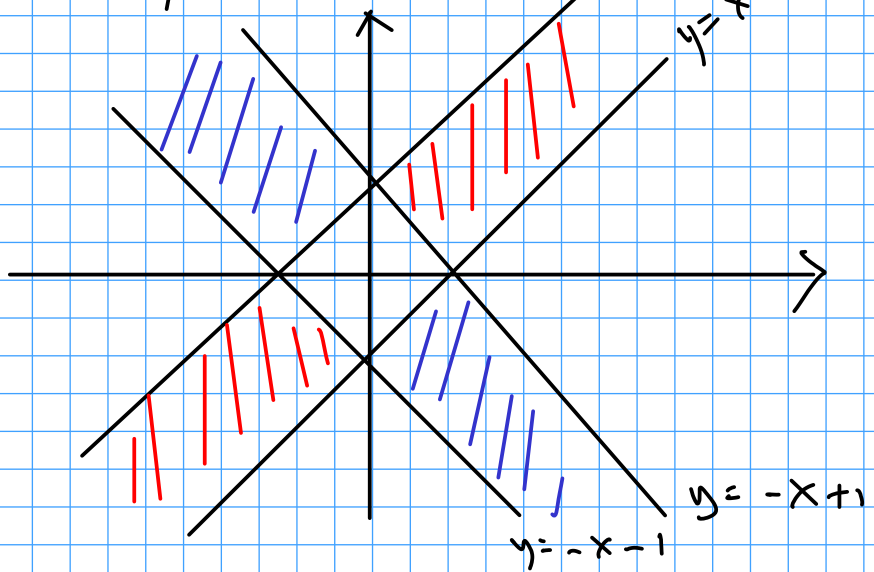
Analisi Matematica II
Lezione 32
14 dicembre 2015

CONTROESEMPIO A FUBINI (se $f(x,y)$ non integrabile in $\mathbb{R}^2$)



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{zona rossa} \\ 0 & \text{zona bianca} \\ -1 & \text{zona blu} \end{cases}$$

È chiaro che $f(x,y)$ non è integrabile in (x,y), perché

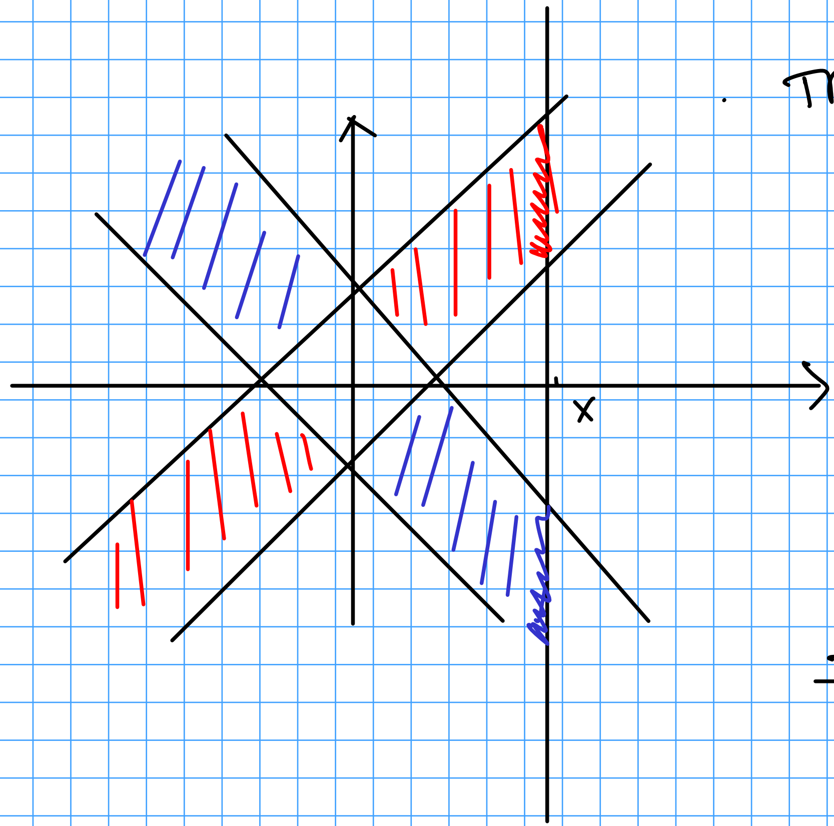
$$f^+(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nella zona rossa} \\ 0 & \text{fuori} \end{cases} \qquad f^-(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nella zona blu} \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

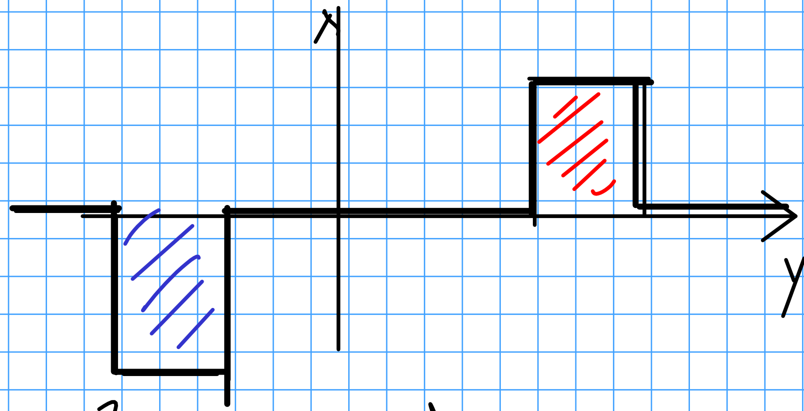
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,dx\,dy = \left|\{\text{zona rossa}\}\right| = +\infty$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,dx\,dy = \left|\{\text{zona blu}\}\right| = +\infty$$

$\Rightarrow f$ NON INTEGRABILE

PERò, se fisso x e integro in y TROVO ZERO $(\forall x)$

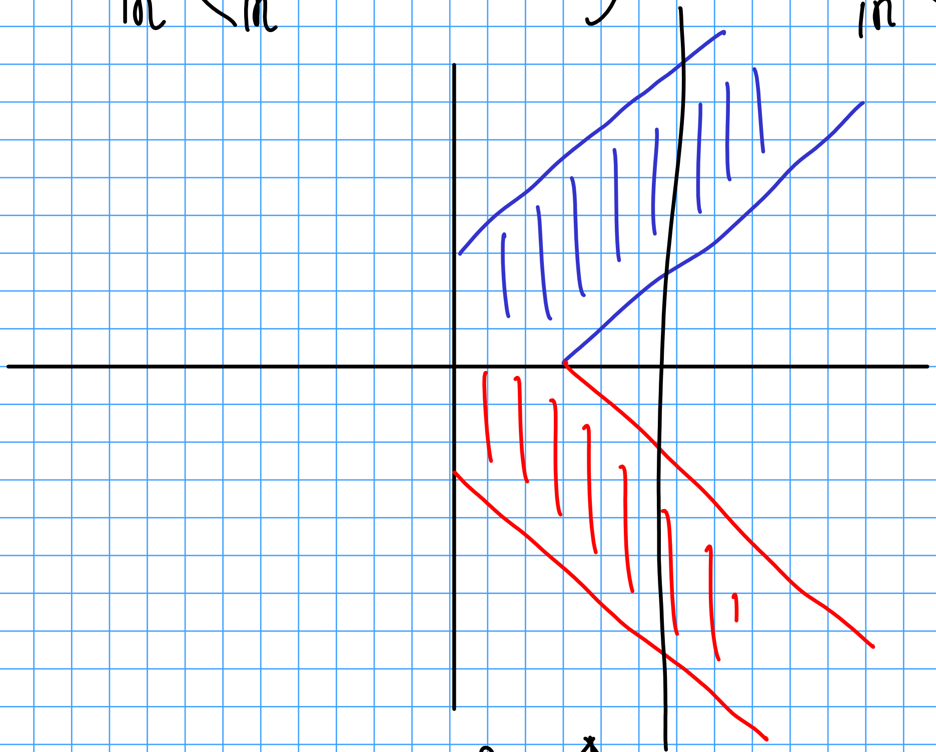




$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = 0$$

Stesso discorso scambiando x e y. Si potrebbe modificare l'esempio e fare sì che

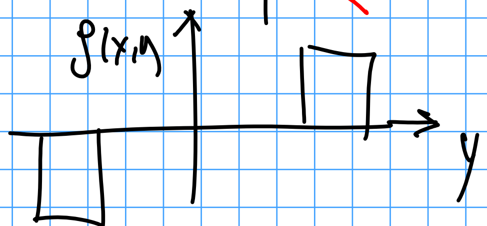
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx \neq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy$$



IN UN VERSO TROVO ZERO

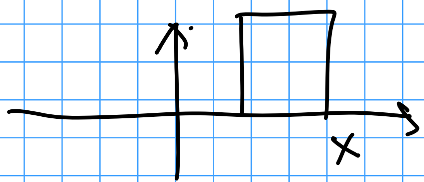
NELL'ALTRO TROVO UNA FUNZIONE NON INTEGRABILE

FISSO x $\Rightarrow$

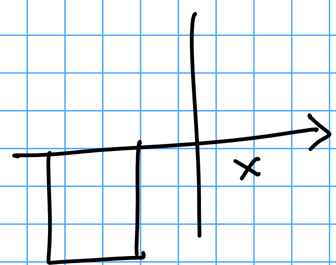


$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = 0$

FISSO y

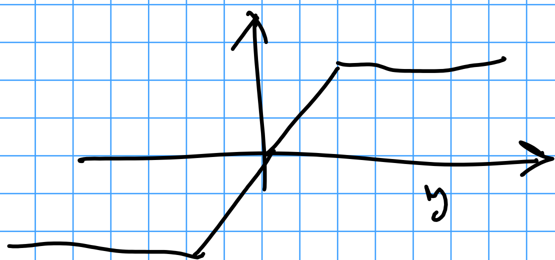


$y<0$



$y>0$

$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$



NON INTEGRABILE

MORALE: FUBINI FUNZIONA SE $\int f$ INTEGRABILE / POSITIVA

ESEMPIO INTERESSANTE $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

NON SO CALCOLARE LA PRIMITIVA DI e^{-x^2}

<u>TRUCCO</u> $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ (≥ 0 TUTTO FUNZIONA)

$$(\ast) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \overset{(\text{FUBINI})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

(POTREBBE ESSERE TUTTO $= +\infty$)

PERALTRO (def di integrale improprio ; oppure il teorema per cui posso invadere il piano $\mathbb{R}^2$ con $B(0,R)$ per $R \to \infty$)

$$(*) = \lim_{R \to +\infty} \iint_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} \, dx\,dy = \left(\text{cambio in coordinate polari}\right)$$

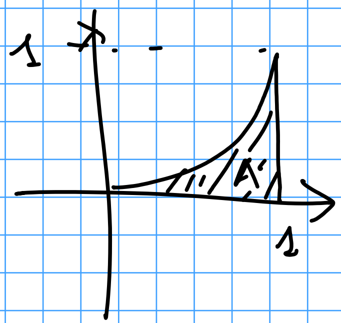
$$\iint_{[0,2\pi) \times [0,+\infty[} \rho e^{-\rho^2} d\rho \, d\theta$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \left(\begin{array}{l} s = \rho^2 \\ ds = 2\rho \, d\rho \end{array} \right)$$

$$= \pi \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = \pi \left[-e^{-s} \right]_0^{+\infty} = \pi (0+1) = \pi$$

DUNQUE $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

ESERCIZI SUGLI INT. IMPROPRI



1) Dire per quali valori di α si ha

$$(*) = \iint_A \frac{dx\,dy}{x^\alpha + y^2} \quad \text{è finito}$$

dove $A = \{0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^2\}$

<u>NOTA</u> Posso usare Fubini (eventualmente con risultato $+\infty$) dato che $f \ge 0$

$$(*) = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{dy}{x^\alpha + y^2}$$

SOSTITUISCO $y^2 = x^\alpha s^2$

$\iff y = x^{\frac{\alpha}{2}} s$

$dy = x^{\frac{\alpha}{2}} ds$

s varia da 0 e $\left(x^{\frac{\alpha}{2}} s = x^2\right)$

$s = x^{2-\alpha/2}$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^{2-\alpha/2}} \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}\, ds}{x^\alpha + x^\alpha s^2} =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha/2}}{x^\alpha} \int_0^{x^{2-\alpha/2}} \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\arctan(s)\right]_0^{x^{2-\alpha/2}} =$$

$$\int_0^1 x^{-\alpha/2} \arctan\left(x^{2-\alpha/2}\right) dx$$

NON LO CALCOLIAMO MA CI CHIEDIAMO PER QUALI α CONVERGE

- L'INTEGRANDO È SINGOLARE (AL PIÙ) VICINO A ZERO

Si ha $\arctan(t) \simeq t$ per $t \simeq 0$ $\left(\lim_{t \to 0} \frac{\arctan(t)}{t} = 1 \right)$

$\Rightarrow$ INTEGRANDO $\simeq x^{-\alpha/2} \, x^{2-\alpha/2} = x^{2-\alpha}$

RICORDO CHE $\int_0^1 x^{2-\alpha} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}} \, dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 < 1$

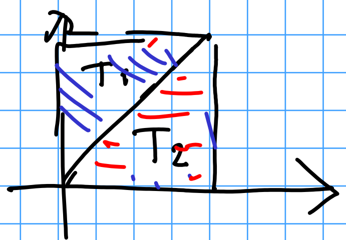
e quindi l'integrale di partenza è finito $\Leftrightarrow \boxed{\alpha < 3}$

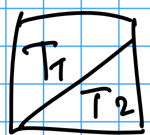
ALTRO ESEMPIO

Per quali $\alpha > 0$ esiste l'integrale:

$$\iint_Q \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \, dx\,dy$$

DOVE $Q = [0,1] \times [0,1]$





NOTA: Posto $T_1 = Q \cap \{x \le y\}$
$T_2 = Q \cap \{x \ge y\}$

Allora $\iint_{T_2} f(x,y)\,dx\,dy = -\iint_{T_1} f(x,y)\,dx\,dy$ (*)

(I DUE INTEGRALI su T_1 / T_2 esistono sempre $\forall \alpha$, potendo essere infiniti $\leftarrow$ per il solo fatto che $f \geq 0$ su T_1 / $f \leq 0$ su T_2)

IN EFFETTI $f^+(x,y) = f(x,y)\, 1_{T_2}(x,y)$ / $f^- = -f\, 1_{T_1}$

ALLORA: f sarà integrabile su Q $\Longleftrightarrow$ $\iint_{T_1} f < +\infty$

$\left(\iint_{T_2} f > -\infty \right)$ E IN TAL CASO $\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy = 0$

DUNQUE, per fare l'esercizio, bisogna vedere per quali valori di α risulta $\iint_{T_1} f(x,y)\, dx\, dy < +\infty$

PER VERIFICARE LA FORMULA (★) basta usare il cambio di variabile (LINEARE) $\phi(x,y) = (y,x)$; Jacobiano $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

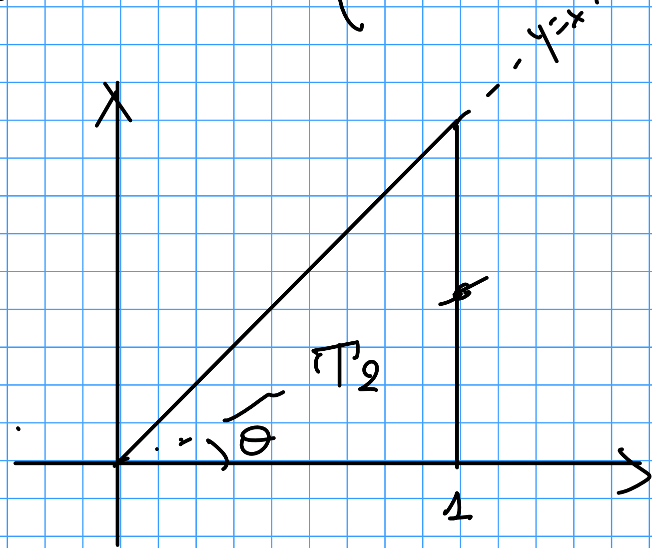
$\det_J = -1$; ϕ TRASFORMA $T_1 \leftrightarrow T_2$; $f(y,x) = -f(x,y)$

$|\det_J| = 1$

$$f(y,x) = \frac{y-x}{(x^2+y^2)^2} = -f(x,y)$$

Calcoliamo dunque $\displaystyle\iint_{T_2} \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ $\quad (\in [0,+\infty])$

$T_2 = \{ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x \}$



VOGLIO USARE LE COORD. POLARI

T_2 diventa $\tilde{T} = \left\{ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta} \right\}$

$x = \rho\cos\theta \qquad 0 \le \rho\cos\theta \le 1 \iff 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}$

$y = \rho\sin\theta$

$$\text{INTEGRALE} = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho \, \frac{\rho\cos\theta - \rho\sin\theta}{\rho^{2\alpha}} \, d\rho =$$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta (\cos\theta - \sin\theta) \int_0^{1/\cos\theta} \rho^{2-2\alpha} \, d\rho \qquad \left(\int \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-2}} \text{ conv} \iff 2\alpha - 2 < 1 \right)$$

L' INTEGRALE IN ρ È IMPROPRIO E CONVERGE $\iff 2-2\alpha > -1$

$$\iff 3 > 2\alpha \iff \boxed{\alpha < \frac{3}{2}}$$

$$\left(\text{QUANDO } \alpha \geq 3/2 \text{ MI TROVO } \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\cos\theta - \sin\theta)}_{\geq 0} (+\infty) \, d\theta = +\infty \right.$$

$$\left. = \int_0^{\pi/4} (+\infty) \, d\theta = +\infty \right)$$

Per $\alpha < \frac{3}{2}$, continuando il calcolo,

$$\int_0^{\pi/4} (\cos\theta - \sin\theta) \left[\frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \right]_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3-2\alpha} \, \frac{\cos(\theta) - \sin\theta}{\cos(\theta)^{3-2\alpha}} \, d\theta$$

QUEST'ULTIMO INTEGRALE È FINITO

Perché se $0 \leq \theta \leq \pi/4 \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(\theta) \le 1$, DUNQUE L'INTEGRANDO È CONTINUO ...

IN DEFINITIVA $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha < 3/2 \\ \text{NON ESISTE} & \text{se } \alpha \geq 3/2 \end{cases}$

- VEDIAMO, per curiosità, se caso $\alpha = 1$ (calcolo l'integrale su T_2)

$$\to \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta} \right) d\theta = \int_0^{\pi/4} (1 - \tan\theta)\, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \tan(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln \cos\theta \Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- VERIFICHIAMO QUESTO CALCOLO FACENDO L'INTEGRALE NELL'ALTRO MODO: (sempre per $\alpha = 1$)

$$\iint_{T_2} \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dy \right) =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy - \int_0^1 \frac{1}{x^2}\int \frac{y\,dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$\frac{y}{x} = s \qquad dy = x\,ds$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\int_0^1 \frac{x\,ds}{1+s^2} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2}\int_0^1 \frac{sx\;x\,ds}{1+s^2} =$$

$$\underbrace{\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{ds}{1+s^2}}_{\int_0^1 \frac{\pi}{4}\,dx = \frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{s\,ds}{1+s^2}}_{\int_0^1 dx\,\frac{1}{2}\left[\ln(1+s^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

TORNA