Analisi Matematica II
Lezione 31
09 dicembre 2015

- INTEGRALI IMPROPRI / GENERALIZZATI

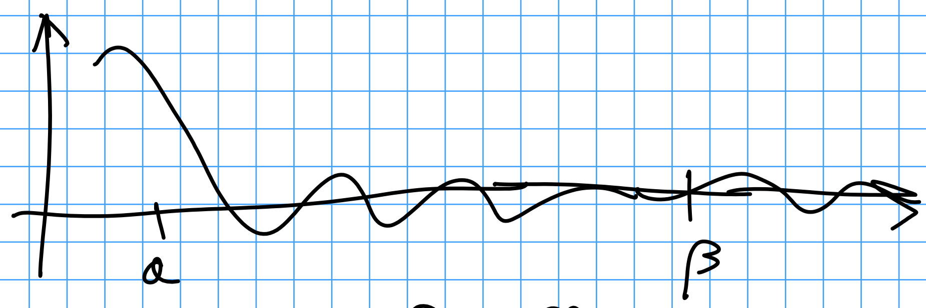
Si considerano insiemi e funzioni NON LIMITATI

Ricordo cosa si fa in 1 variabile: in questo caso si integra su un intervallo di estremi a, b $([a,b] /]a,b] / [a,b[/]a,b[)$

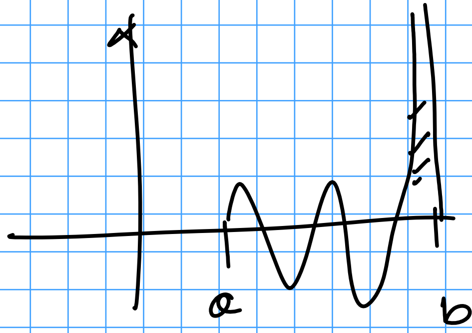
Per l'int. secondo Riemann $-\infty < a < b < +\infty$ e f deve essere limitata

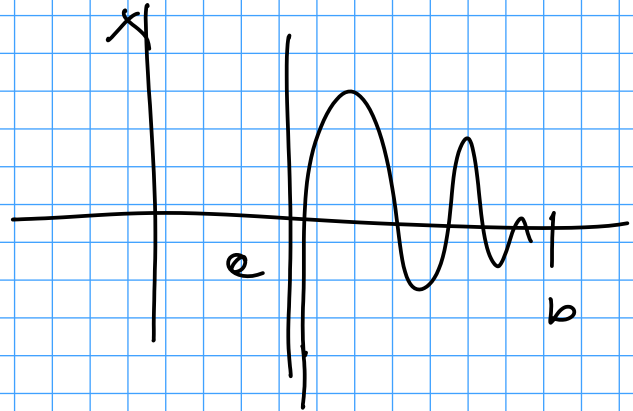
Se voglio trattare per esempio il caso $b = +\infty$ faccio il limite

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$$



Stesso discorso se voglio $a = -\infty$ oppure f illimitata in un intorno sinistro di b / intorno destro di a





IN PIÙ VARIABILI NON È CHIARO CHE LIMITE DEVO FARE (GLI INSIEMI SU CUI SI INTEGRA NON SONO SEMPLICI COME GLI INTERVALLI IN $N=1$)

TRATTO PER PRIME LE FUNZIONI $f \geq 0$

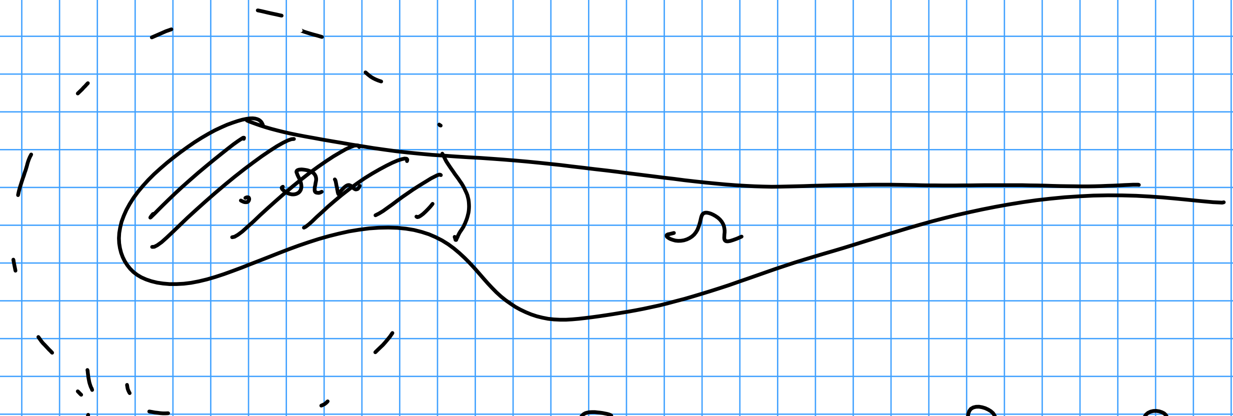
DEF. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dato $n \in \mathbb{N}$

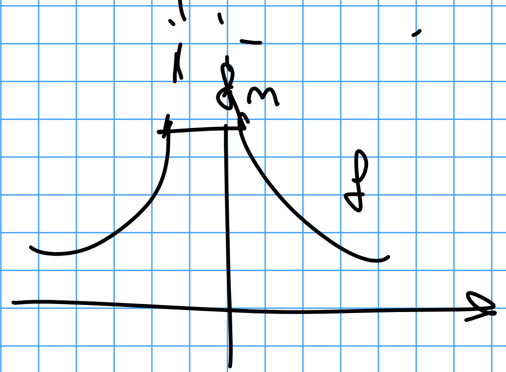
chiamo $\Omega_n = \Omega \cap B(0,n)$

$$f_n = f \wedge n = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

IPOTESI f_n sia integrabile secondo Riemann su Ω_n $\forall n$

DEFINISCO $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_n} f_n(x)\,dx \in [0, +\infty]$





NOTA: $f_n \le f_{n+1} \le f \quad \forall n$

$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega \quad \forall n$

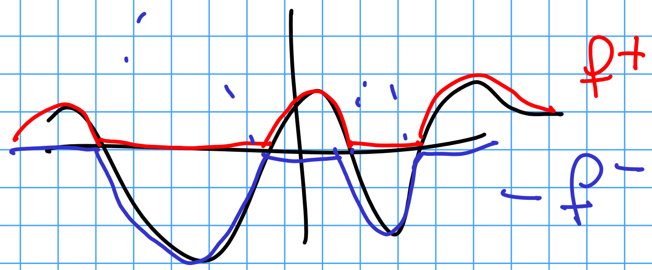
$\Rightarrow \int_{\Omega_n} f_n(x)\,dx$ CRESCE $\Rightarrow$ HA LIMITE

DUNQUE se $f \geq 0$, f e Ω "hanno un minimo di regolarità" (IPOTESI) $\Rightarrow$ $\int_{\Omega} f(x)\,dx$ esiste sempre, EVENTUALMENTE VALE $+\infty$

- DICO CHE f è integrabile in senso improprio su Ω se
$$\int_{\Omega} f(x)\,dx < +\infty$$
- Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è "generico" dico che f è integrab.

in senso improprio su Ω se

f^+ , f^- sono integrabili in senso improprio su Ω



$$\left(f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^- \right)$$

e in questo caso chiamo integrale improprio di f su Ω

$$\int_\Omega f(x)\,dx \underset{def}{=} \int_\Omega f^+(x)\,dx - \int_\Omega f^-(x)\,dx \quad (\in \mathbb{R})$$

LA DEFINIZIONE NEL CASO DI $f \geq 0$ è "buona" perché vale il seguente teorema

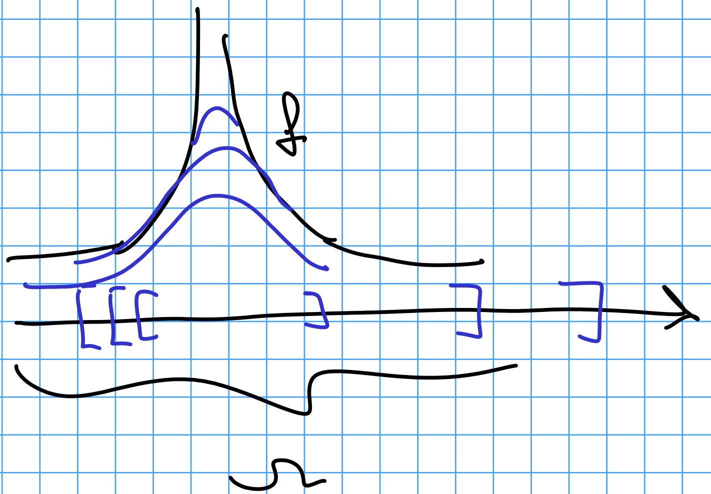
TEOR ☆ Se f è ≥ 0, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se per ogni x

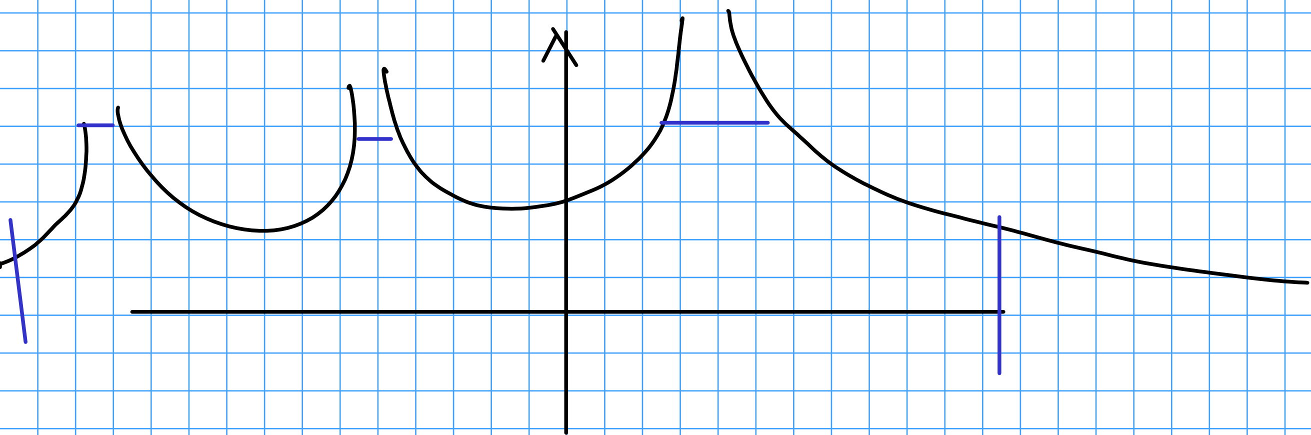
$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ se

$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$, f_n è integrabile su Ω_n $\forall n$

ALLORA $\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_n} f_n(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,dx$

$\left(= \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap B(0,n)} (f \wedge n)(x)\,dx \right)$





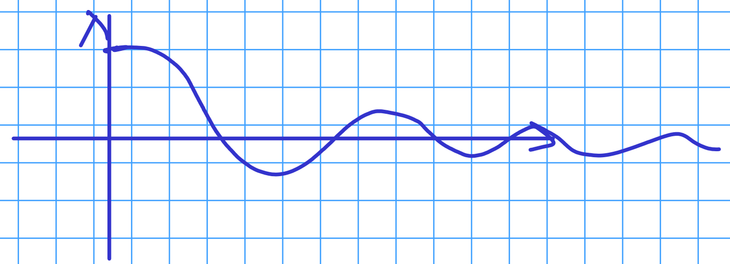
OSS. Questa definizione è più restrittiva di quella falso in $N=1$. Infatti se si usa questa definizione

$$f \text{ integrabile su } \Omega \iff |f| \text{ integrabile su } \Omega \iff f^+ \text{ e } f^- \text{ integrabili su } \Omega$$

Questa proprietà non è vera in $N=1$ seguendo la definizione data ad Analisi 1. Per esempio

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$(=1 \text{ se } x=0)$$



Si vede che esiste finito $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

e quindi $\frac{\sin(x)}{x}$ è int. in senso improprio su $[0,+\infty[$

SECONDO LA DEFINIZIONE UNIDIMENSIONALE

ma si può vedere che $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^+ dx = +\infty \;/\; \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^- dx = +\infty$

QUELLO CHE SUCCEDE in $N=1$

(1) Se $f \geq 0$ LA DEFINIZIONE DATA ORA COINCIDE CON QUELLA UNIDIMENSIONALE

(2) NEL CASO GENERALE :

f è assolutamente integrabile (DEF. DI ANALISI 1)

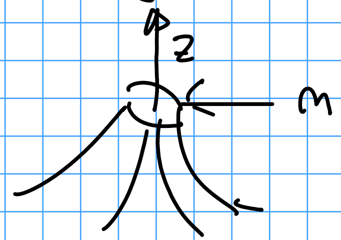
$\Updownarrow$

f e' integrabile (DEF. DATA ORA)

VEDIAMO UN PO' DI ESEMPI. $\boxed{N = 3}$

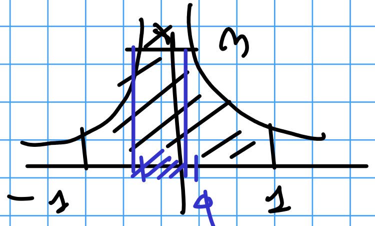
(1) $f(x) = \dfrac{1}{\|x\|^\alpha}$ $\Omega = B(0,1)$

È chiaro che la troncata $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{se } \|x\|^\alpha \geq \dfrac{1}{n} \\ n & \text{se } \|x\|^\alpha \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



è continua $\Rightarrow$ integrabile su $B(0,1) = B(0,1)_m$. DEVO DUNQUE CALCOLARE

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} g_n(x)\,dx =$$



$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{B(0,\,n^{-1/2})} n\,dx + \int_{\underbrace{n^{-1/2}\le \|x\|\le 1}_{\text{DISCO CAVO}}} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{\|x\|^{\alpha}} = n \iff \frac{1}{\|x\|} = n^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\|x\| = n^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{4}{3}\pi\, n^{-3/2}}_{\text{VOLUME DELLA PALLA TRIDIMENSIONALE DI RAGGIO } n^{-1/2}} n + \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\psi\,d\psi \int_{n^{-1/2}}^{1} \rho^2\,\frac{d\rho}{\rho^{\alpha}}}_{\text{COORDINATE SFERICHE}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\pi\, n^{1-\frac{3}{2}} + 2\pi\left[-\cos\psi\right]_0^{\pi} \int_{n^{-1/2}}^{1} \rho^{2-\alpha}\,d\rho\right) = (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\pi\, n^{\frac{\alpha-3}{2}} + 4\pi\left[\frac{\rho^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_{n^{-1/2}}^{1}\right) =$$ ($\alpha \neq 3$ se no vediamo dopo)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\pi\, n^{\frac{\alpha-3}{2}} + \frac{4\pi}{3-\alpha} + \frac{4\pi}{\alpha-3}\, n^{\frac{\alpha-3}{2}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ \dfrac{4\pi}{3-\alpha} & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

NEL CASO $\alpha = 3$ si ha $(*) =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi \ln(\rho)\Big|_{n^{-1/3}}^{1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4\pi}{3} - \ln\left(\frac{1}{n^{?}}\right)\right) = +\infty$$

IN DEFINITIVA

$$\iiint_{B(0,1)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 3 \\ \frac{4\pi}{3-\alpha} & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

(La funzione è integrabile per $\alpha < 3$)

<u>ESERCIZIO</u> VERIFICARE CHE

$$\iint_{B(0,1)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \text{ è finito} \iff \alpha < 2$$

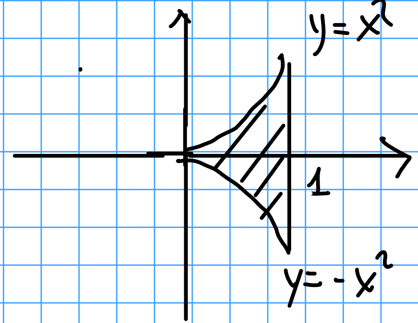
(e calcolare tale integrale)

SI PUÒ DIM. IN GENERALE CHE

$$\int_{B(0,1)} \frac{dx}{\|x\|^{\alpha}} \text{ è finito} \iff \alpha < N$$

ESERCIZIO

$\Omega = \{0 \le x \le 1,\ -x^2 \le y \le x^2\}$



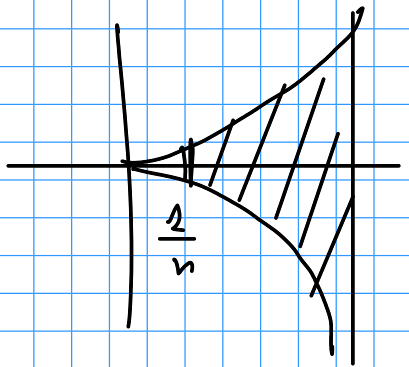
$$f_\alpha(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^\alpha$$

VEDIAMO per quali α f_α è integrabile su Ω.

SFRUTTIAMO IL TEOREMA ★ e il secondo

$\Omega_n = \{\frac{1}{n} \le x \le 1,\ -x^2 \le y \le x^2\}$

$f_n(x) = f(x)$ su Ω_n, $f_n(x) = 0$ su $\Omega \setminus \Omega_n$.



DUNQUE DEVO FARE

$$\int_{\Omega_n} \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} = \int_{1/n}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} =$$

(e poi far tendere $n \to \infty$) CAMBIO DI VARIABILE IN Y

$y = x \cdot t \qquad dy = x\,dt \qquad$ (t è la nuova variabile, x fissata)

$$= \int_{1/n}^{1} dx \int_{-x}^{x} \frac{x\,dt}{\left(\sqrt{x^2+x^2t^2}\right)^{\alpha}} = \int_{1/n}^{1} dx\, \frac{x}{x^{\alpha}} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^{\alpha}} =$$

$$2\int_{1/n}^{1} x^{1-\alpha} \underbrace{\left(\int_{0}^{x} \frac{dt}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^{\alpha}}\right)}_{g(x)} dx$$

$g(0)=0$

g è continua in x ed è derivabile

con $g'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{\alpha}} \Rightarrow g'(0) = 1$

$\Rightarrow g(x) = x + o(x) \Leftrightarrow$

$\frac{g(x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \quad x^{1-\alpha} g(x) \simeq x^{1-\alpha} x = x^{2-\alpha} \quad \left(= \frac{1}{x^{\alpha-2}}\right.$$

(RIGOROSAMENTE $\frac{x^{1-\alpha}\, g(x)}{x^{2-\alpha}} \to 1$ per $x \to 0$ $\left.\right)$)

TALE FUNZIONE $(x^{1-\alpha} g(x))$ è integrabile su $[0,1]$ (in senso impr.)

$\Leftrightarrow$ $\alpha - 2 < 1$ cioè $\boxed{\alpha < 3}$

NOTA Per $\alpha = 2$ si può fare il calcolo: (FINO A UN CERTO PUNTO...)

$$2\int_{1/n}^{1} x^{1-\alpha}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right)dx =$$

$$2\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\arctan(x)\,dx$$ $\underline{\text{FINITO}}$ per ℓ_0^- $\frac{\arctan(x)}{x} \to 1$