Analisi Matematica II
Lezione 27
30 novembre 2015

Integrale di una funzione $f : R \to \mathbb{R}$ limitata
R rettangolo limitato

ABBIAMO DEFINITO :
- INTEGRABILITÀ (*)
- INTEGRALE

(*) f è integrabile se $\displaystyle\int_{*R} f(x)\,dx = \int_R^{*} f(x)\,dx$

$$\int_{*R} f(x)\,dx = \sup_{\sigma} s(f,\sigma) \qquad \int_R^{*} f(x)\,dx = \inf_{\sigma} S(f,\sigma)$$

PIÙ IN GENERALE se $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ limitato

ABBIAMO DEFINITO
- INTEGRABILITÀ di f su A
- INTEGRALE

per mezzo della funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e usando $\tilde{f}$ si definisce $\displaystyle\int_A f(x)\,dx := \int_R \tilde{f}(x)\,dx$

dove R è un qualunque rettangolo che contiene A.

__FATTO__ Se f è continua su A e A è un dominio regolare chiuso ($A = \{x : G(x) \leq 0\}$ dove G è C^1 e $\nabla G(x) \neq \vec{0}$ nelle x per cui $G(x) = 0$)

$\Rightarrow$ f integrabile su A

__TEOREMA__ Se f è integrabile su A_1 e su A_2 $\Rightarrow$ f è integrabile su $A_1 \cup A_2$. Inoltre se $|A_1 \cap A_2| = 0$

$$\Rightarrow \int_{A_1 \cup A_2} f(x)\,dx = \int_{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_2} f(x)\,dx$$

COME SI CALCOLA UN INTEGRALE su $A \subset \mathbb{R}^N$??

$\rightarrow$ Ci si riconduce a degli "integrali iterati"

TEOREMA (FUBINI)

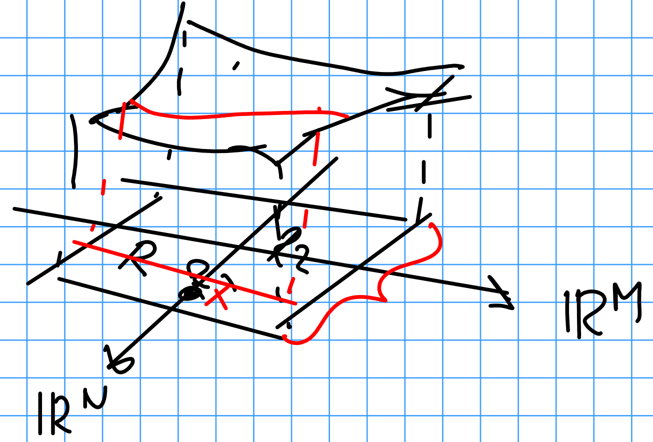
- R rettangolo di $\mathbb{R}^{N+M}$ $\Rightarrow$ $R = R_1 \times R_2$ dove R_1 rettangolo di $\mathbb{R}^N$ e R_2 rettangolo di $\mathbb{R}^M$
- CONVENIAMO DI SCRIVERE (x, y) per indicare i punti di $\mathbb{R}^{N+M}$ $(x \in \mathbb{R}^N \quad y \in \mathbb{R}^M)$
- $f : R \to \mathbb{R}$ limitata

Conveniamo di scrivere $f(x, y)$ per $x \in R_1$ $y \in R_2$

- IPOTESI f sia integrabile su R. ALLORA

VALE

$$\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y)\, dy \right) dx$$



PIÙ PRECISAMENTE Se f è integrabile su $R\,(=R_1\times R_2)$

(1) Le due funzioni

$$x \longmapsto \int_{*R_2} f(x,y)\,dy \quad , \quad x \longmapsto \int_{R_2}^{*} f(x,y)\,dy$$

(hanno senso perché gli integrali superiore/inferiore esistono per qualunque funzione limitata)

sono integrabili su R_1 (ENTRAMBE) .:.

e coincidono tra loro per "quasi ogni x"

$\cdot \left| \{ x \in R_2 \text{ per cui non coincidono} \} \right| = 0$

($\Rightarrow$ il loro integrale rispetto a x è lo stesso)

(2)
$$\int_{R_1}\left(\int_{R_2 *} f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$\int_{R_1}\left(\int_{R_2}^{*} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{R} f(x,y)\,dx\,dy$$

NELLA PRATICA NON CI SARÀ BISOGNO DI USARE $\int_*$ e $\int^*$ perché AVREMO CHE COINCIDONO $\forall x$

OSS. Se f è integrabile su R $\Rightarrow$

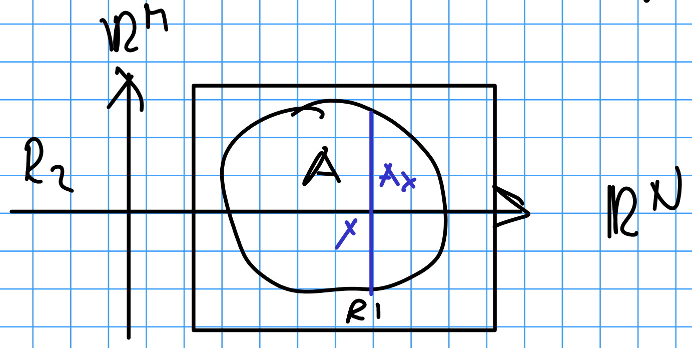
$$\int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{R_2}\left(\int_{R_1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

(modulo i discorsi "quasi ovunque" fatti sopra)

CONSEGUENZA

A insieme misurabile $\subset \mathbb{R}^{N+M}$

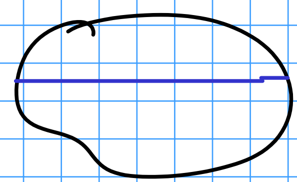
Supponiamo che $A \subset R = R_1 \times R_2$ (come sopra)



$$\Rightarrow |A| = \int_{R_1} |A_x|\,dx = \int_{R_2} |A_y|\,dy$$

dove $A_x = \{ y : (x,y) \in A \}$

$A_y = \{ x : (x,y) \in A \}$

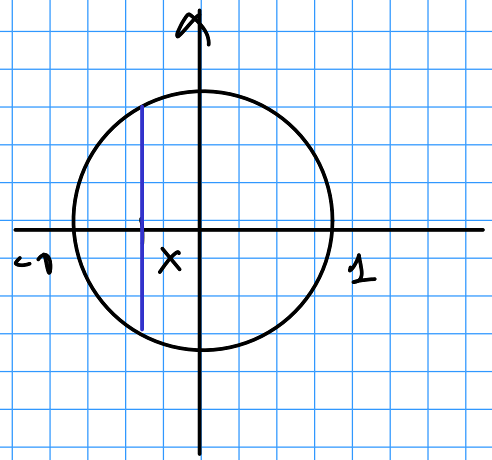


(PRINCIPIO DI CAVALIERI)

Anche qui bisognerebbe precisare che A_x è misurabile per quasi tutte le x e che $|A_x|$ è una funzione integrabile

Per esempio

$$A = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$$



$$A \subset [-1,1] \times [-1,1]$$

Fisso $x \in [-1,1]$

$$A_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

$$|A_x| = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin(t) \qquad dx = \cos t \, dt \qquad \longrightarrow$

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t \, dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt =$$

$$4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos(2t)+1}{2} \right) dt = 2\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t \right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

0

(HO TROVATO L'AREA DEL CERCHIO)

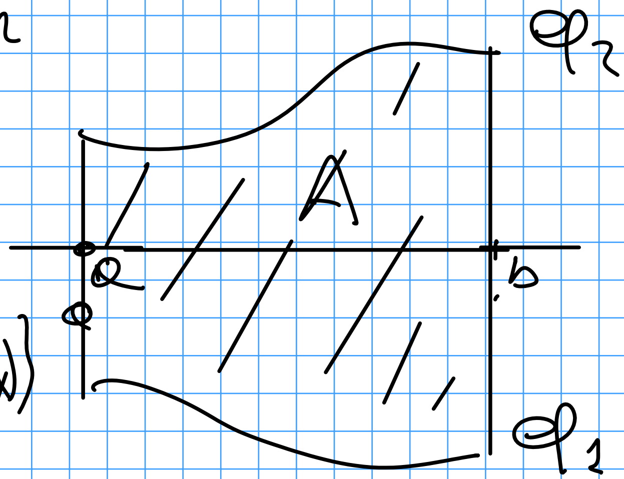
CONSEGUENZE del teorema di Fubini

CASO $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

DEF. $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto a x

se esiste $[a,b] \subset \mathbb{R}$, due funzioni $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$

CONTINUE ; $\varphi_1 \leq \varphi_2$



per cui

$$A = \{ (x,y) \mid : a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

ALLORA se A è come sopra

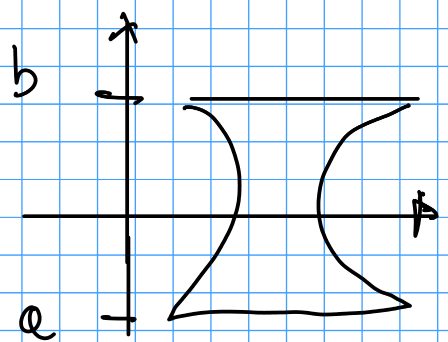
$$|A| = \int_a^b \left(\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \right) dx$$

Inoltre (più in generale) se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua su A

$$\Rightarrow \iint_A f(x,y) \, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

DISCORSO ANALOGO SE A è "normale rispetto a y"

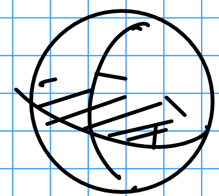
cioè $A = \{(x,y) : a \le y \le b \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(x)$



$$\left(\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \right)$$

ESEMPIO CALCOLO $|B|$ dove

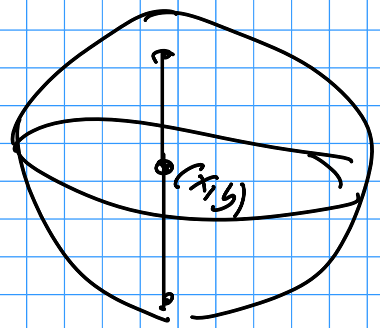
$$B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$$



(I) Applico il principio di Cavalieri:

Allora $A = \{ x^2+y^2 \le 1 \} \subset \mathbb{R}^2$ e per ogni

$(x,y) \in A$ considero il segmento $A_{xy} = [-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}]$

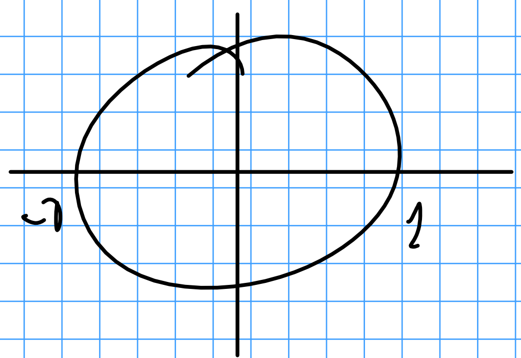


$$\{ z : (x,y,z) \in B \}$$

$$|B| = \iint_A |A_{xy}| \, dx\,dy = \iint_A 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\,dy = ⊛$$

(II) Vedo A come insieme normale rispetto all'x:

$$A = \{ (x,y) : -1 \le x \le 1 \, , -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$



$$\Rightarrow ⊛ = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \right) dx =$$

$$8 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \right) dx =$$

$$8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy\right)dx =$$

$$s=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ds=\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}} \qquad dy=\sqrt{1-x^2}\,ds$$

$$8\int_0^1 (1-x^2)\left(\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds\right)dx = 8\left(\int_0^1 (1-x^2)\,dx\right)\left(\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds\right)$$

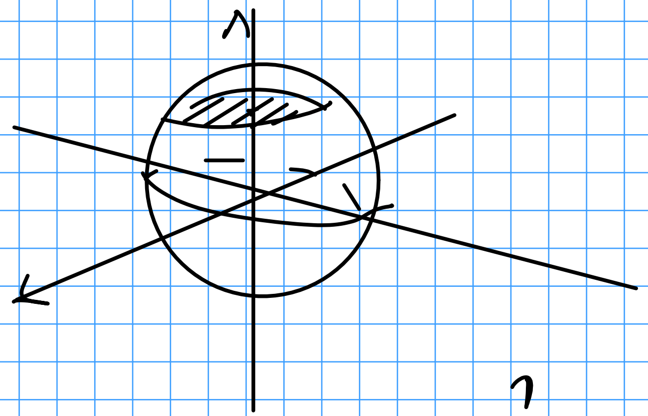
$$= 8\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(8\cdot\frac{2}{3}\right)\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds \qquad s=\sin(t) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2}+\underbrace{\frac{\sin(2t)}{4}}_{=0}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

SI PUÒ FARE ANCHE IN UN ALTRO MODO

(CAVALIERI CON UN'ALTRA DECOMPOSIZIONE)



$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

$$|B| = \int_{-1}^{1} |B_z| \, dz$$ dove

$$B_z = \{ (x,y) : (x,y,z) \in B \} =$$

$$\{ (x,y) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \} = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \}$$

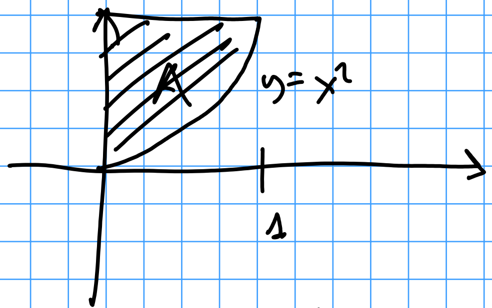
cerchio di raggio $\sqrt{1-z^2}$

$$\Rightarrow |B| = \int_{-1}^{1} \pi (1 - z^2) \, dz = 2\pi \int_0^1 (1 - z^2) dz = 2\pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

ALTRO ESEMPIO

$$\iint_A xy \, dx\, dy \qquad \text{dove} \quad A = \underbrace{\{ 0 \le x \le 1 \qquad x^2 \le y \le 1 \}}_{\text{NORMALE RISPETTO AX}}$$



$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1 dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x \left(1 - x^4 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^5) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_A x^2 \, dx\, dy$$

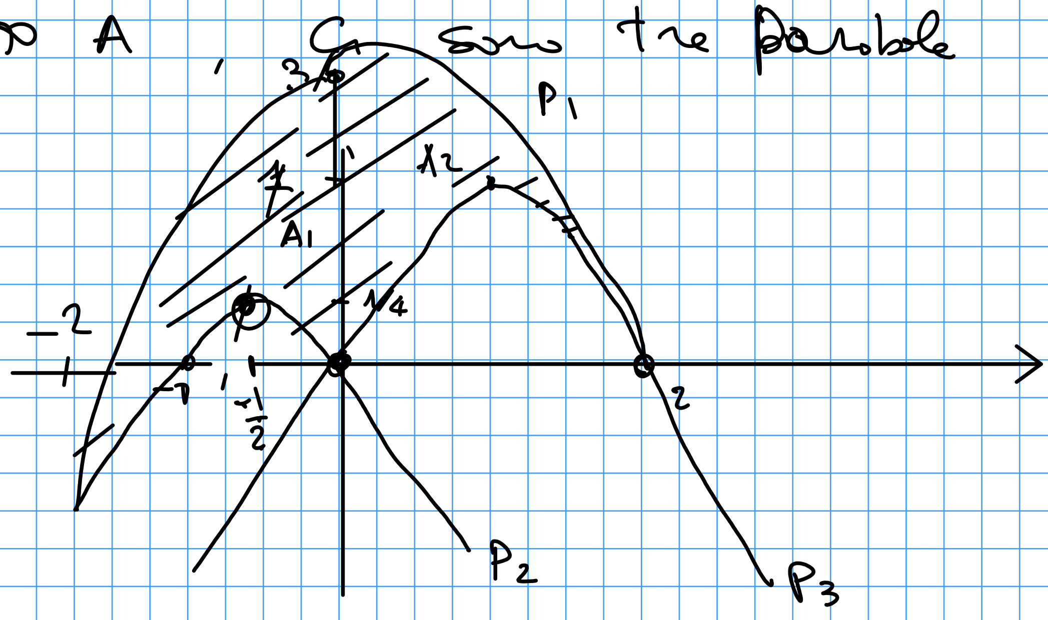
$$\text{dove } A = \{ y \le -x^2 + \frac{x}{2} + 3, \; y \ge \overbrace{-x^2 - x}^{P_2(x)}, \; y \ge \overbrace{-x^2 + 2x}^{P_3(x)} \}$$

CAPIRE COME È FATTO A, ci sono tre parabole

$P_1(x) = -x^2 + \frac{x}{2} + 3$

$P_2(x) = -x^2 - x$

$P_3(x) = -x^2 + 2x$



$P_2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ -

$P_1(x)$ passa per $(0, 3)$

$P_1(x) = 0 \iff -2x^2 + x + 6 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-4}$

$= \frac{1 \mp 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$A = A_1 \cup A_2$ dove

$A_2 = \{ 0 \leq x \leq 2$ $\quad P_3(x) \leq y \leq P_1(x)$

$A_1 = \{-2 \leq x \leq 0 \qquad P_2(x) \leq y \leq P_1(x)$

?? devo trovare l'intersezione tra P_1 e P_2

$$-x^2 + \frac{x}{2} + 3 = -x^2 - x \iff$$

$$\frac{3}{2}x + 3 = 0 \iff x = -2$$

Sia A_1 che A_2 sono normali rispetto a x

$$\iint_A x^2\,dx\,dy = \underbrace{\iint_{A_1} x^2\,dx\,dy}_{1} + \underbrace{\iint_{A_2} x^2\,dx\,dy}_{2}$$

$$1 = \int_{-2}^{0} x^2 \left(\int_{-x^2-x}^{-x^2+\frac{x}{2}+3} dy \right) dx = \int_{-2}^{0} x^2 \left(\frac{3}{2}x + 3\right) dx =$$

$$\int_{-1/2}^{0} \left(\frac{3}{2}x^3 + 3x^2\right) dx = \left[\frac{3}{2}\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 2$$

(2) $$\int_0^2 x^2 \left(\int_{-x^2+2x}^{-x^2+\frac{x}{2}+3} dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left(-\frac{3}{2} x + 3 \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(-\frac{3}{2} x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{8} x^4 + x^3 \right]_0^2 =$$

$$-\frac{3}{8} 16 + 8 = 2$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE SU A $= 4$