Analisi Matematica II
Lezione 26
25 novembre 2015

INTEGRALI MULTIPLI

Rettangolo in $\mathbb{R}^N$ è il prodotto di N intervalli;

Intervallo = $[a,b]$ / $]a,b[$ / $[a,b[$ / $]a,b]$ /
$]-\infty,b]$ / $]-\infty,b[$ / $[a,+\infty[$ / $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$

Se I è un intervallo la lunghezza di I è definita come $\underbrace{\sup I - \inf I}_{|I|}$ (può essere $+\infty$)

$$R \text{ (rettangolo)} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$$
$$= \{(x_1, \dots, x_N) : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_N \in I_N\}$$

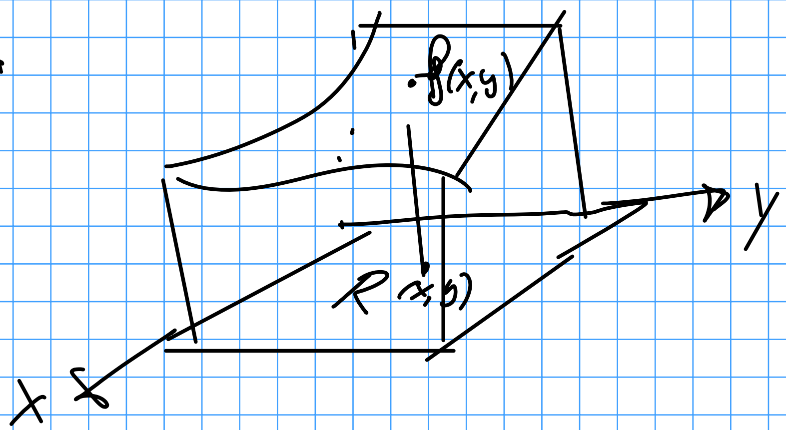
LA MISURA di un rettangolo R è definita da

$$|R| = |I_1| \cdot |I_2| \cdots |I_N|$$

Voglio definire <u>l'integrale</u> di una funzione

$f : R \to \mathbb{R}$ dove R è un rettangolo LIMITATO

e f è LIMITATA

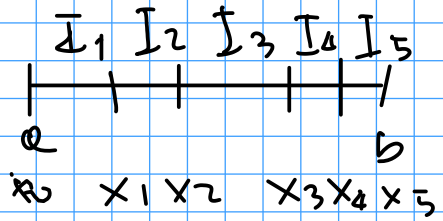


<u>Def</u>: Ricordo che una "suddivisione" di un intervallo limitato $[a,b]$ è un numero finito di punti (ordinati)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_K = b$$

che danno origine a K sottointervalli: $I_1 = [x_0, x_1] \dots$

$I_K = [x_{K-1}, x_K]$



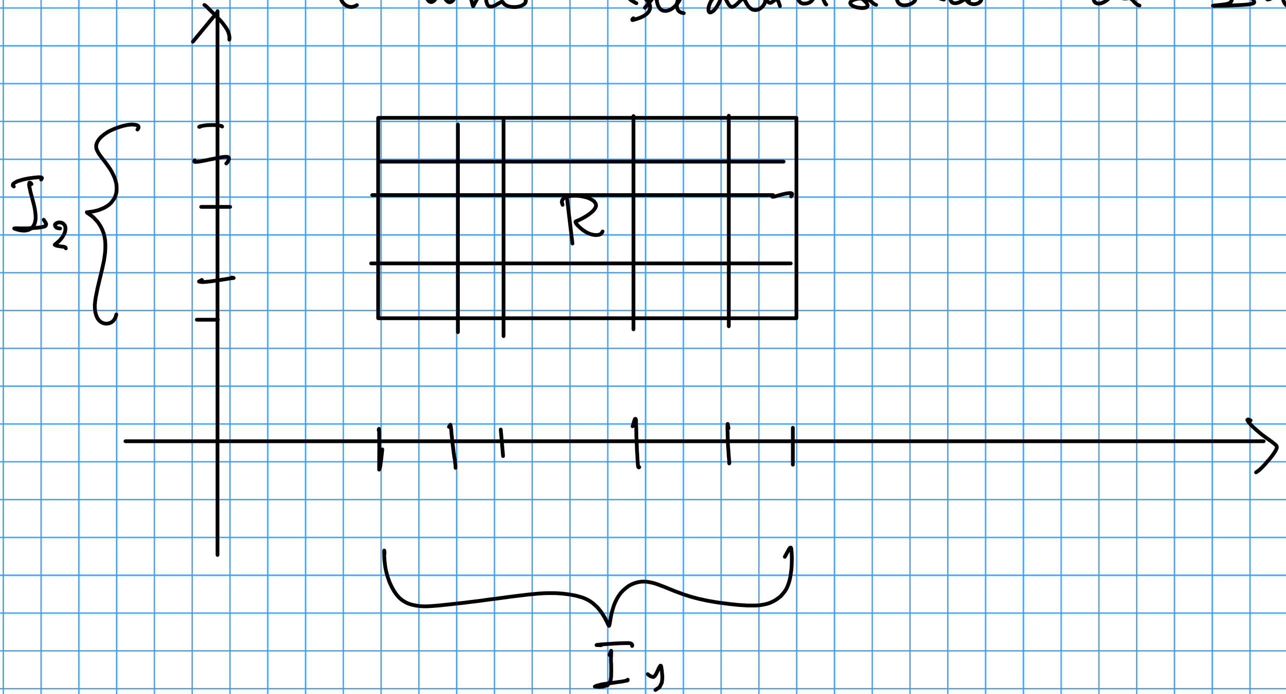
$$\sigma = \{x_0, \dots, x_K\}$$

Dato R rettangolo $R = I_1 \times I_2 \times \dots I_N$, limitati

chiamo "suddivisione" di R

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\} \quad \text{dove ogni } \sigma_i$$

è una suddivisione di I_i



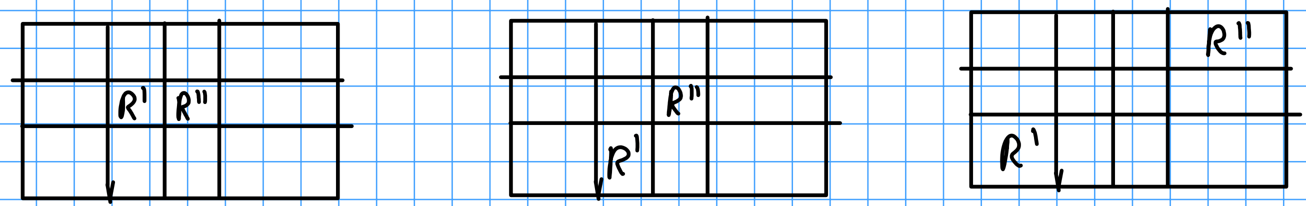
Se σ_i contiene $k_i + 1$ punti $\Rightarrow$ σ produce

$k_1 \times k_2 \times \dots \times k_N$ Rettangoli.

CONVENGO: Si indicano con σ anche i sottorettangoli generati in questo modo

NOTA $R = \bigcup_{R' \in \sigma} R'$ (se σ è una suddivisione di R)

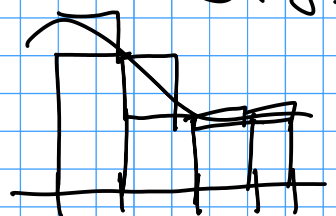
INOLTRE se $R', R'' \in \sigma$ $R' \cap R''$ è un rettangolo di misura zero



Def. Data $f : R \to \mathbb{R}$ limitata, data σ suddivisione di R definisco

$$S(f, \sigma) = \sum_{R' \in \sigma} \sup_{x \in R'} f(x) |R'|$$ (SOMMA SUPERIORE RELATIVA A σ)

$$s(f, \sigma) = \sum_{R' \in \sigma} \inf_{x \in R'} f(x) |R'|$$ (SOMMA INFERIORE RELATIVA A σ)



Posso definire

$$\int_{R}^{*} f(x)\,dx = \inf_{\sigma \text{ suddivisione}} S(f,\sigma)$$

INTEGRALE SUPERIORE DI f SU R

$$\int_{*R} f(x)\,dx = \sup_{\sigma \text{ suddivisione}} s(f,\sigma)$$

INTEGRALE INFERIORE DI f SU R

DICO CHE f <u>È INTEGRABILE SU R</u> se questi due numeri coincidono. In tal caso scrivo

$$\boxed{\int_R f(x)\,dx} = \int_R^{*} f(x)\,dx = \int_{*R} f(x)\,dx$$

LO CHIAMO INTEGRALE DI f su R

(INTEGRALE SECONDO RIEMANN)

<u>OSS</u> Si può dimostrare che, date due arbitrarie

suddivisioni σ_1 e σ_2, si ha

$$s(f,\sigma_1) \le S(f,\sigma_2)$$

e quindi

$$\int_{*R} f(x)\,dx \le \int_R^{*} f(x)\,dx$$

Per avere l'integrabilità devo avere "="

<u>Caratterizzazione</u> Dato $f: R \to \mathbb{R}$ f limitato, R rettangolo limitato. f è integrabile su R se e solo se

(a) $\forall \varepsilon \ \exists \sigma$ suddivisione tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$$

OPPURE

(b) Esiste una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni tali che $S(f,\sigma_n) - s(f,\sigma_n) \to 0$ (per $n \to \infty$)

In questo caso posso dire che

$$S(f,\sigma_n) \to \int_R f(x)\,dx \quad / \quad s(f,\sigma_n) \to \int_R f(x)\,dx$$

CI SONO FUNZIONI INTEGRABILI. SÌ

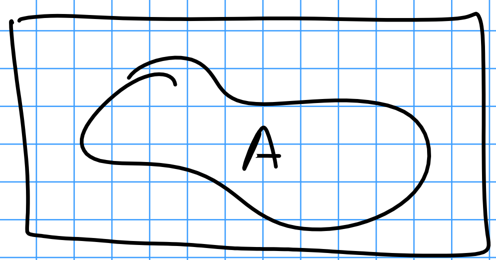
Teorema. Se R è chiuso, $f : R \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow$ f è integrabile su $\mathbb{R}$

Def. Dato un insieme A in $\mathbb{R}^N$, A limitato introduco la "funzione indicatrice di A" definita da:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Dico che A è misurabile (secondo Riemann) se 1_A è integrabile su R (dove R è un rettangolo con $A \subset R$)

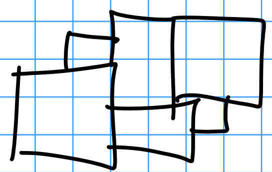


chiamo "misura di A" $\quad |A| := \int_R 1_A(x)\,dx$

(si dimostra che $|A|$ non dipende da R)

OSS. Si può arrivare alla misura di A in maniera più diretta in questo modo.

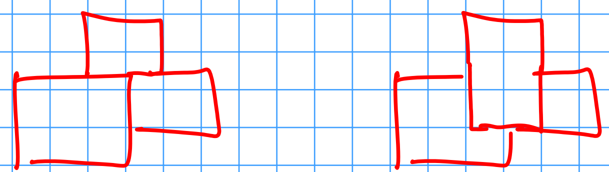
- Chiamo "plurirettangolo" un insieme P che sia unione di rettangoli $P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ dove gli R_i si intersecano tra loro al più in sottorettangoli di misura nulla



- Chiamo misura di un plurirettangolo P

$$|P| = \sum_{i=1}^{k} |R_i| \qquad \left(\text{se } P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i \right)$$

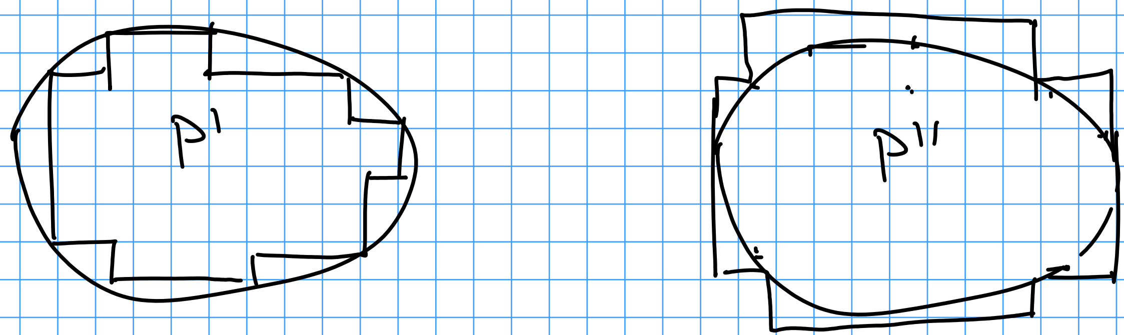
SI DIMOSTRA CHE $|P|$ NON DIPENDE DAL MODO IN CUI DESCRIVO P come unione di rettangoli



• Dato A definisco

$$|A|^* = \inf_{A \subset P''} |P''| \qquad \text{misura superiore di } A$$

$$|A|_* = \sup_{A \supset P'} |P'| \qquad \text{misura inferiore di } A$$



• Si dimostra che A è misurabile se e solo se

$$|A|^* = |A|_* \qquad (= |A|)$$

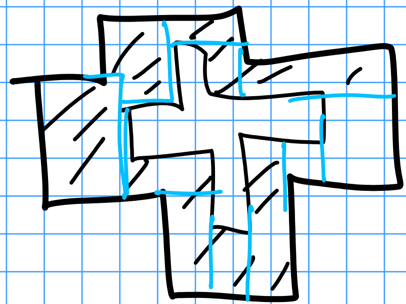
<u>Def.</u> Dico che $A \subset \mathbb{R}^N$ è trascurabile se A è misurabile e $|A| = 0$

<u>Caratterizzazione</u> A è misurabile se e solo se

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad P' \subset A \subset P''$ $\quad P', P''$ plurirettangoli

tali che $\quad |P'' \setminus P'| < \varepsilon$

(NOTA: LA DIFFERENZA TRA PLURIRETTANGOLI È ANCORA UN PLURIRETTANGOLO)



(b) $\exists$ due successioni di plurirettangoli P'_n e P''_n

tali che $\quad P'_n \subset A \subset P''_n \quad$ e $\quad |P''_n - P'_n|$.

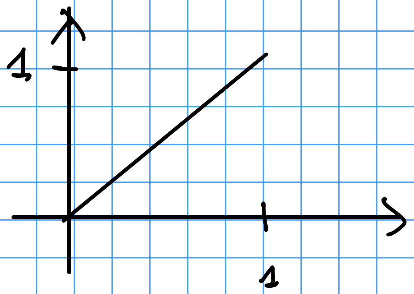
In tal caso $\quad |P'_n| \to |A| \quad // \quad |P''_n| \to |A|$

<u>CONSEGUENZA</u> $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ è trascurabile $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad P$ plurirettangolo tale che $\quad A \subset P, \ |P| < \varepsilon$

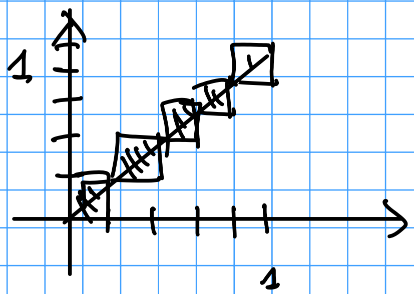
<u>PER ESEMPIO</u> $\quad A = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } 0 \le x \le 1\}$

Dico che $|A| = 0$



Fisso $n \in \mathbb{N}$. Divido $[0,1]$ in n parti eguali di lunghezza $1/n$

Considero P_n = unione dei quadretti nel disegno



$\Rightarrow A \subset P_n$

$$|P_n| = \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Dunque, se $n \to \infty$, $|P_n| \to 0$ (quindi diventa $< \varepsilon > 0$ se $\varepsilon > 0$ è scelto all'inizio! BASTA CHE $\frac{1}{n} < \varepsilon$)

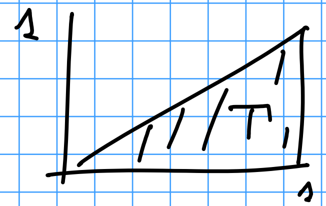
TEOREMA Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

- LIMITATA
- CONTINUA SU $R \setminus A$ dove $|A| = 0$

$\Big\} \Rightarrow f$ è INTEGRAB. SU R

PER ESEMPIO

L'INDICATRICE DEL TRIANGOLO $T = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

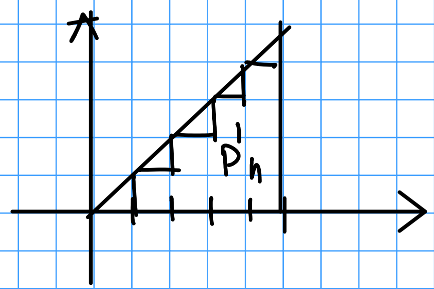


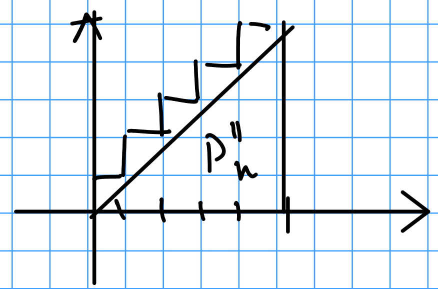
È INTEGRABILE SU $Q = [0,1] \times [0,1]$

Perché è continua infatti i punti di Q eccetto la diagonale (che ha misura nulla)

$\Rightarrow$ T è misurabile. In effetti se divido $[0,1]$ in n sottointervalli di ampiezza $1/n$

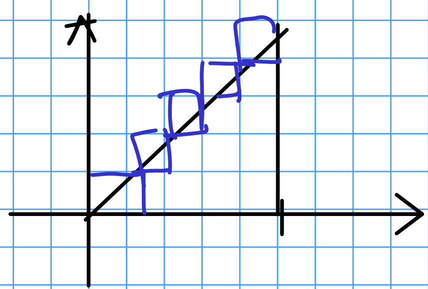
posso costruire P'_n e P''_n plurirettangoli





$$P'_n \subset T \subset P''_n$$

$$|P''_n - P'_n| = |\text{quello di prima}| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$



TEOREMI VARI $\qquad$ R rettangolo limitato

(a) f, g integrabili su R $\Rightarrow$ $f+g$ è integr. su R

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_R f + \mu \int_R g$$

(b) f g integrabili $\Rightarrow$ $f \cdot g$ integrabile

(c) f, g integrabile $\Rightarrow$ $\max(f, g)$ / $\min(f, g)$ è int.

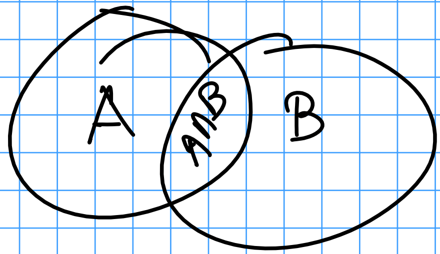
(d) f integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ è integrabile e si ha

$$\left| \int_R f(x)\,dx \right| \leq \int_R |f(x)|\,dx$$

(e) $f \geq g$ (integrabili) $\Rightarrow$ $\int_R f(x)\,dx \geq \int_R g(x)\,dx$

(a) A, B misurabili $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili. Inoltre

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$



Se $|A \cap B| = 0$ (per esempio se $A \cap B = \emptyset$) $\Rightarrow$
$|A \cup B| = |A| + |B|$

(b) Se f e g sono integrabili su $\mathbb{R}$ e se
$f(x) = g(x)$ per ogni x eccetto $x \in A$ con $|A| = 0$
(f e g coincidono tranne che su un insieme trascurabile)

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$$

(c) Se f è integrabile su $\mathbb{R}$, $f \geq 0$ e
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow$ f è nulla tranne che su un insieme trascurabile

cioè $|\{x : f(x) > 0\}| = 0$

(d) A limitato

A è misurabile $\iff$ ∂A è trascurabile

(ne segue che se A è misurabile anche $\mathrm{int}(A)$ e $\bar{A}$ sono misurabili)

(e) Se D è un dominio regolare, cioè

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) \leq 0 \}$$

dove $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, differenziabile con $\nabla G(x) \neq 0$ per tutte le x in cui $G(x) = 0$, e se D è limitato

$\Rightarrow$ D è misurabile $\quad$ ($\partial D = \{ x : G(x) = 0 \}$ è trasc.)

DEF. Se $f : A \to \mathbb{R}$ dove A è un insieme misurabile (limitato), definisco

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Consideriamo anche un rettangolo limitato R con $A \subset R$.

Dico che f è integrabile su A se $\tilde{f}$ è integrabile su R

(in questa def. la scelta di R non conta, purché $A \subset R$).

Pongo $$\int_A f(x)\,dx = \int_R \tilde{f}(x)\,dx$$

<u>NOTA</u> $$|A| = \int_A 1\,dx$$

SI PUÒ DIM. CHE se $f \geq 0$ $$\int_A f(x)\,dx = |\mathrm{epi}(f)|$$

dove $\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) : x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$

IN GENERALE $$\int_A f(x)\,dx = |\mathrm{epi}(f^+)| - |\mathrm{epi}(f^-)|$$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$