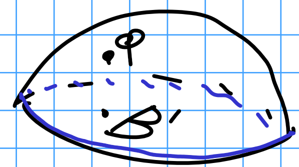
Analisi Matematica II
Lezione 23
18 novembre 2015

ULTERIORE VARIANTE di max/min di f su S dove

$$f(x,y,z) = z\, e^{xy} \qquad S = \{x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

Prendiamo solo $S^+ = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0\}$



NOTA CHE SU $S^1 = \{x^2+y^2 = 4,\ z = 0\}$

la f vale ZERO $\Rightarrow \min\limits_{S^+} f = 0$

visto che su S^+ $f \geq 0$ ($z \geq 0$, $e^{xy} > 0$)

$\Rightarrow \max\limits_{S} f = \max\limits_{S^+} f$ (perché sull'altro "emisfero" $f \leq 0$)

CERCO IL MAX DI f SU S^+

POSSO VEDERE S^+ come grafico di $\varphi(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

φ DEFINITA su $B' = \{x^2+y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$

(CIOÈ $S^+ = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in B^1\}$)

QUESTA DESCRIZIONE PERMETTE DI STUDIARE

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y))$$ su B^1, cioè

$$\tilde{f}(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\, e^{xy}$$ (da studiare su B^1 = CERCHIO DI RAGGIO 2)

CERCHIAMO I PTI STAZ. DI $\tilde{f}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}\, e^{xy} + \sqrt{4-x^2-y^2}\, y\, e^{xy} =$$

$$\frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-x + y\left(4-x^2-y^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-y + x\left(4-x^2-y^2\right)\right)$$ (scambiando x con y ...)

(queste derivate esistono se $x^2+y^2<4$. Peraltro su $\{x^2+y^2=4\}$ $\tilde{f}$ vale zero e quindi il pto di max $\notin \{x^2+y^2=4\}$)

EGUAGLIAMO $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ a ZERO:

$$\begin{cases} x = y(4-x^2-y^2) \\ y = x(4-x^2-y^2) \end{cases} \Rightarrow \quad x = x(4-x^2-y^2)^2 \iff$$

$$x=0 \quad \text{oppure} \quad (4-x^2-y^2)^2 = 1$$

Se $x=0$ RICAVO $y=0$ $\rightsquigarrow$ $(0,0)$ (che corrisponde a $(0,0,2)$ su S^+)

Se $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $4 - x^2 - y^2 = \pm 1$ $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \quad \text{NON ACCETTABILE (SIAMO IN } x^2+y^2 \leq 4) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{4-x^2-y^2 = 1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

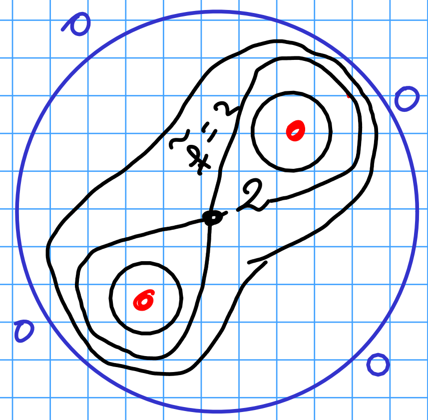
(che corrisponde a $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$ su S^+)

CALCOLO $\tilde{f}$ su questi punti:

$$\tilde{f}(0,0) = 2 \qquad \tilde{f}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = e^{3/2}$$

$\Rightarrow$ IL MAX VALE $e^{3/2}$ (>2), assunto nei pti $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

VEDIAMO LA NATURA DEL PTO STAZ. $(0,0)$ (per $\tilde{f}$)



$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right)\right) =$$

$$\frac{y\, e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{e^{xy}\,(-2x)}{\left(4-x^2-y^2\right)^{3/2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right) +$$

$$\frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-1-2xy\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right)\right) =$$

$$\frac{x e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right) +$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{e^{xy}\;(-2y)}{\left(4-x^2-y^2\right)^{3/2}}\left(-x+y\left(4-x^2-y^2\right)\right) +$$

$$\frac{e^{xy}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\left(4-x^2-y^2-y\cdot 2y\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(0,0) = 2$$

$\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}$ = (per simmetria) la stessa espressione di $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$

scambiando x e y $\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(0,0) = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad H\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \det. = \frac{1}{4} - 4 < 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ è un pto di sella.

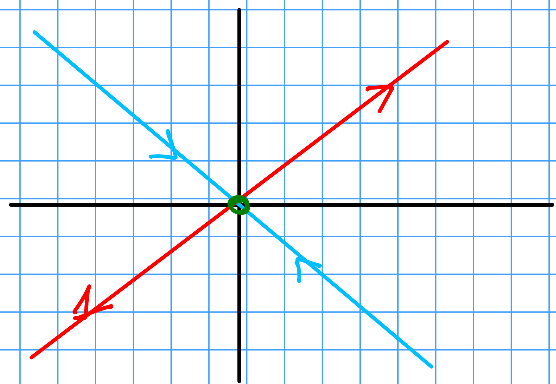
SI VEDE FACILMENTE CHE $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 + 2 \\ 2 - 1/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\lambda_1 = \frac{3}{2} > 0\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 2 \\ -2 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{5}{2}}_{\lambda_2 < 0}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ È UNA SELLA RISPETTO ALLE BISETTRICI

$\Rightarrow$ LE LINEE DI LIVELLO SONO COME NEL DISEGNO DI PRIMA



TEOREMA DINI GENERALE

$G : A(\subset \mathbb{R}^{N+M}) \to \mathbb{R}^M$

(x_0, y_0) tale che $G(x_0, y_0) = 0$

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{i=1\dots M \\ j=1\dots M}} = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{INVERTIBILE}$$

ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE $\varphi : \underbrace{B(x_0, \delta)}_{\text{INTORNO DI } x_0 \text{ IN } \mathbb{R}^N} \to \underbrace{B(y_0, \varepsilon)}_{\text{INTORNO DI } y_0 \text{ IN } \mathbb{R}^M}$

tale che $\{G(x,y) = 0\} \cap$ "$\{$VICINO A $(x_0, y_0)\}$" $=$

$$\{(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^N}, \underbrace{\varphi(x)}_{\mathbb{R}^M}) \quad x \in B(x_0, \delta)\}$$

PER ESEMPIO

$$G_1(x, y, z) = 0$$
$$G_2(x, y, z) = 0$$

$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ $\qquad G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Se la matrice $\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \end{bmatrix}$ ha det. $\neq 0$ in un punto (x_0, y_0, z_0)

$\Rightarrow$ esiste $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^2$ tale che

$f = (f_1, f_2)$, $\quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}$

$M = \{G(x, y, z) = 0\}$ è descritto da $(x, f_1(x), f_2(x))$

(VICINO A (x_0, y_0, z_0))

CIOÈ, VICINO A (x_0, y_0, z_0), M è descritto da una curva.

NOTA POSSO SCRIVERE $M = M_1 \cap M_2$ dove

$M_1 = \{ G_1(x, y, z) = 0 \}$

"due superfici"

$M_2 = \{ G_2(x, y, z) = 0 \}$

che hanno come "normale" i vettori

$\vec{n}_1 = \nabla G_1$ $\qquad\qquad$ $\vec{n}_2 = \nabla G_2$

IDEA: se ∇G_1 e ∇G_2 sono LINEARMENTE INDIP. IN (x_0, y_0, z_0)

$\Rightarrow$ le due superfici M_1 e M_2 si "intersecano bene"

MA COME VERIFICO CHE ∇G_1 e ∇G_2 sono lin. indip ??: GUARDO LA MATRICE

$$\begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \end{matrix}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \end{pmatrix} \qquad (= J_G)$$

E VEDO SE HA UN MINORE 2×2 con determinante $\neq 0$

PER L'IPOTESI FATTA CIO' È VERO

DET $\neq 0$

IN GENERALE L'IPOTESI DI DINI IMPLICA CHE I VETTORI $\nabla G_1 \ldots \nabla G_M$ SONO LIN. INDIPENDENTI