Analisi Matematica II
Lezione 22
17 novembre 2015

ESEMPIO

Studiare $f(x,y,z) = z e^{xy}$

su $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$ (VOGLIO TROVARE MAX / MIN DI f SU S)

USIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI

$\frac{\partial}{\partial x} f = yz e^{xy}$; $\frac{\partial}{\partial y} f = xz e^{xy}$; $\frac{\partial}{\partial z} f = e^{xy}$

NOTA f NON HA PUNTI STAZIONARI LIBERI DATO CHE $\frac{\partial f}{\partial z} > 0 \quad \forall x,y,z$

MOLTIPLICATORI:

$$\begin{cases} yz e^{xy} = \lambda 2x \\ xz e^{xy} = \lambda 2y \\ e^{xy} = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} e^{xy} = 2\lambda z \\ 2\lambda y z^2 = 2\lambda x \\ 2\lambda x z^2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \left(\Rightarrow \begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ z \neq 0 \\ \text{dalla } I^a \end{matrix} \right) \iff \begin{cases} e^{xy} = 2\lambda z \\ y z^2 = x \\ x z^2 = y \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} e^{xy} = 2\lambda z \\ x = y z^2 \\ y = y z^4 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda z = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 = 4 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} e^{xy} = 2\lambda(\pm 1) \\ x = y \\ z^4 = 1 \ (\iff z^2 = 1) \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$$

NEL PRIMO CASO TROVO $(0,0,2)$ $[\lambda = 1/4]$ e $(0,0,-2)$ $[\lambda = -1/4]$

NEL SECONDO CASO TROVO

$$\begin{cases} e^{x^2} = \pm 2\lambda \\ x = y \quad z = \pm 1 \\ x^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$$

$\lambda = \dots$

CALCOLIAMO f su questi punti:

$$f(0, 0, \pm 2) = \pm 2$$

$$f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \pm 1\right) = \pm e^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{e^{\frac{3}{2}} > 2}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^3 > 4$$

$$\Uparrow$$

$$e > 2$$

DUNQUE $\max_S f = e^{3/2}$

$\min_S f = -e^{3/2}$

RINUNCIAMO A CAPIRE LA NATURA DEI PUNTI $(0, 0, \pm 2)$

<u>VARIANTE</u> PARAMETRIZZIAMO LA SFERA:

$$x = 2\cos\theta \sin\psi$$

$$y = 2\sin\theta\sin\psi$$

$$z = 2\cos\psi$$

(sfera di raggio 2)

e studiamo $\tilde{f}(\theta, \psi) = 2\cos(\psi)\, e^{4\cos\theta\sin\theta\sin^2\psi}$.

$= 2\cos(\psi)\, e^{2\sin(2\theta)\sin^2\psi}$.

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \psi \leq \psi$

TROVIAMO I PTI STAZ. LIBERI DI $\tilde{g}$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = 2\cos(\psi)\, e^{2\sin(2\theta)\sin^2\psi}\; 2\cos(2\theta)\cdot 2\cdot \sin^2\psi$$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \psi} = -2\sin(\psi)\, e^{2\sin(2\theta)\sin^2\psi} + \left(2\cos\psi\, e^{2\sin(2\theta)\sin^2\psi}\right) \times \left(2\sin(2\theta)\, 2\sin\psi\cos\psi\right) =$$

$$\left[2\sin(\psi)\, e^{2\sin(2\theta)\sin^2(\psi)} \left(-1 + 4\cos^2(\psi)\sin(2\theta) \right) \right]$$

$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = 0 \iff$ (a) $\cos\psi = 0$ (b) $\cos(2\theta) = 0$ (c) $\sin\psi = 0$

CASO (a) guardo $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \psi} = 0 \iff \pm 2 e^{\sim} (-1 + 0) = 0$
IMPOSSIBILE

CASO (c) $\sin\psi = 0$ $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \theta$ qualunque SONO TUTTI STAZ.

$\psi = 0$ $\psi = \pi$ (POLO NORD / SUD $- \theta$ NON CONTA!

$\tilde{g} = \pm 2 \quad \left((x,y,z) = (0,0,\pm 2) \right)$

CASO (b) $\quad \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \sin(2\theta) = \pm 1$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\tilde{g} = 2\sin(\psi)\, e^{\pm 2 \sin^2(\psi)} \left(-1 \pm 4\cos^2(\psi) \right) = 0 \iff$$

$\sin(\psi) = 0$ (GIÀ VISTO SOPRA - POLO NORD/SUD)

oppure $\quad -1 \pm 4\cos^2(\psi) = 0 \quad$ IL SEGNO "$-$" È IMPOSSIBILE

QUINDI TROVO $\quad \cos(2\theta) = 0 \quad \sin(2\theta) = 1$

$4\cos^2(\psi) = 1 \iff \cos^2(\psi) = \frac{1}{4} \quad \sin^2\psi = \frac{3}{4}$

CALCOLO $\tilde{g} = 2\left(\pm\frac{1}{2}\right) e^{2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}} = \pm e^{3/2}$ (COME PRIMA !!)

CON QUESTO SECONDO MODO POSSO VEDERE CHE TIPO DI PUNTO STAZ È $(0,0,2)$ // $(0,0,-2)$ che corrispondono a $\psi = 0$ $\psi = 2\pi$