Analisi Matematica II
Lezione 21
16 novembre 2015

MAX / MIN "VINCOLATI"

Torniamo all'ultimo esempio:

$$f(x,y) = xy \quad \text{sul "vincolo"} \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = M$$

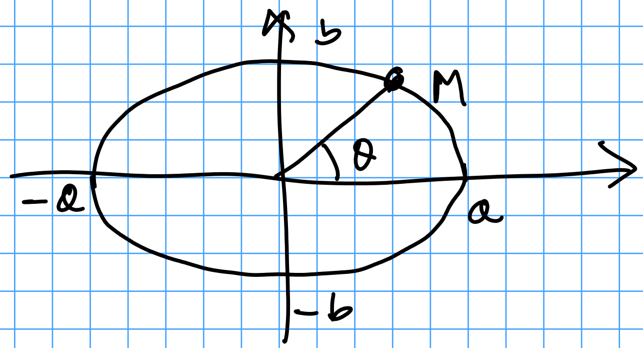
Abbiamo trovato $\max_M f \left(= \frac{ab}{2} \right)$ e $\min_M f \left(= -\frac{ab}{2} \right)$

usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

(cerco i pti "stazionari vincolati" cioè i pti t.c.

$$\nabla f = \lambda \nabla G \quad \text{dove} \quad G(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

SI PUÒ IN REALTÀ FARE IN UN ALTRO MODO



POSSO DESCRIVERE M mediante una curva

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Usando questo γ posso cercare il max/min di f su M cercando

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi} f(\gamma(\theta)) \Big/ \min_{0\le\theta\le 2\pi} f(\gamma(\theta))$$

$\rightarrow$ HO TRASFORMATO IL PROBLEMA $\longrightarrow$ RICERCA DI MAX/MIN per una funzione di 1 variabile $\theta \in [0, 2\pi]$

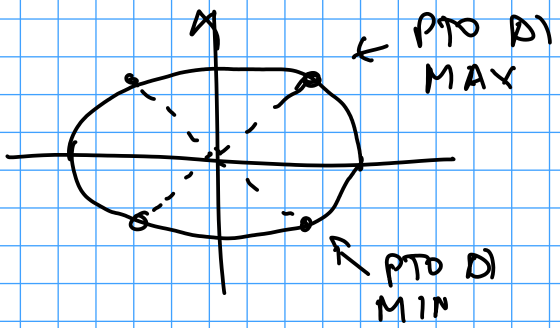
SI HA $f(\gamma(\theta))$

$$(\underbrace{a\cos\theta}_{x})(\underbrace{b\sin\theta}_{y}) = ab\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\sin(2\theta)$$, quindi cerco

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi} \frac{ab}{2}\sin(2\theta) \Big/ \min_{0\le\theta\le 2\pi} \frac{ab}{2}\sin(2\theta)$$

$\frac{ab}{2}$ (si realizza per $2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$) $\quad -\frac{ab}{2}$ (per $\theta = -\frac{\pi}{4}$)

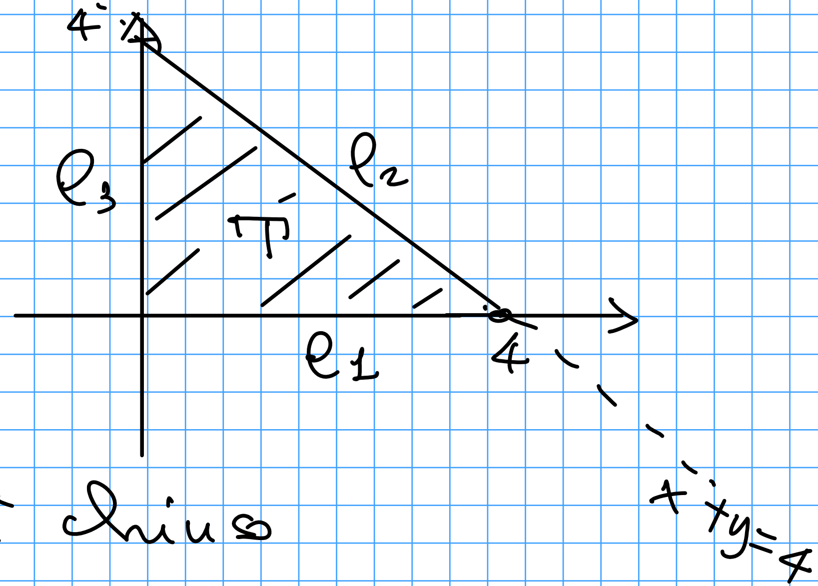


$(+k\pi)$

ALTRO ESEMPIO: Cerco max / min su T per

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

dove



$$T = \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4\}$$

• <u>OSS</u> È chiaro che T è chiuso

$$\mathrm{int}(T) = \{x>0,\ y>0,\ x+y<4\}$$

$$\partial T = \underbrace{\{(x,0)\ \ 0 \leq x \leq 4\}}_{e_1} \cup \underbrace{\{(0,y) : 0 \leq y \leq 4\}}_{e_3} \cup \underbrace{\{x+y=4,\ 0 \leq x \leq 4\}}_{e_2}$$

$\partial T \subset T$ (T è chiuso)

- T è limitato $\qquad T \subset B((0,0), 4)$
- Per Weierstrass esistono $\max_T f$ / $\min_T f$

(f è continua)

- I pti di max/min POSSONO

(i) essere interni a T (essere dentro $\mathrm{int}(T)$)

IN QUESTO CASO devono essere pti stazionari (liberi) per f : $\nabla f = 0$

(ii) essere su ∂T - NON SI RIESCE però a scrivere $\partial T = \{G(x,y)=0\}$ con G C^1 (perché ci sono gli spigoli - i vertici di T)

PER RICONDURMI ALLA TEORIA BISOGNA TRATTARE SEPARATAMENTE f su ℓ_1 / f su ℓ_2 / f su ℓ_3

NOTA $\qquad f(x,y) = 0$ se $(x,y) \in \ell_1$ / $(x,y) \in \ell_3$

QUINDI C'È POCO DA TROVARE SU ℓ_1 e ℓ_3. RIMANE

$$\ell_2 = \{ \quad x+y=4 \quad 0<x<4 \} =$$

$$\{(x,y) \in A \ : \ G(x,y)=0\}$$

dove $A = \{0<x<4\}$ $\quad G(x,y) = x+y-4$

A è aperto

(Siamo nelle ipotesi del teorema) $\Rightarrow$ gli eventuali pti di max/min su ℓ_2 devono verificare

$$\nabla f = \lambda \nabla G \qquad \text{per } \lambda \in \mathbb{R} \text{ opportuno.}$$

COMINCIAMO da (i) (pti staz. liberi in int(T))

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\, e^{-(x+y)} + x^2 y\left(-e^{-(x+y)}\right) =$$

$$e^{-(x+y)}\left(2xy - x^2 y\right) = xy(2-x)e^{-(x+y)}$$

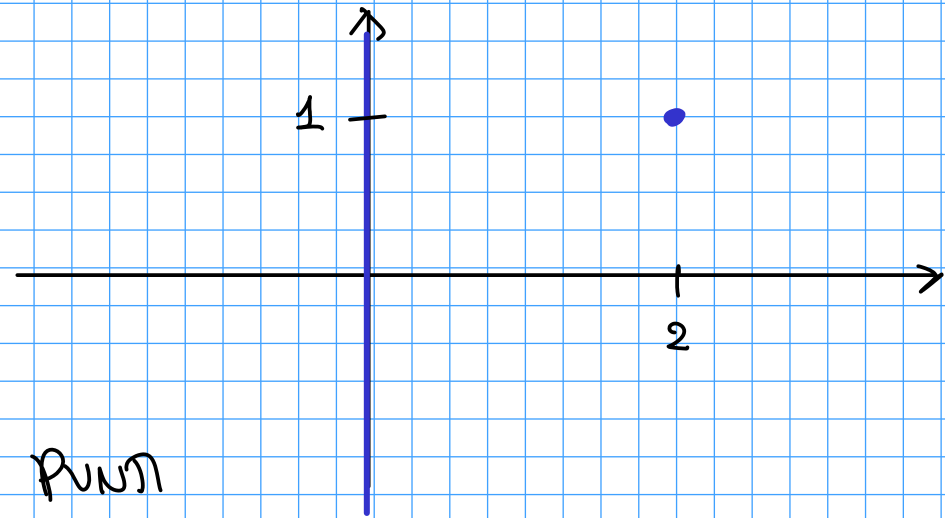
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{-(x+y)} - x^2 y\, e^{-(x+y)} = x^2(1-y)\, e^{-(x+y)}$$

PTO STAZIONARI (liberi) $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(2-x)\, e^{-x-y} = 0 \\ x^2(1-y)\, e^{-x-y} = 0 \end{cases}$

$\iff$ $x = 0$ (y qualunque) oppure

$y = 0$ $x = 0$ (già nella riga sopra) oppure

$x = 2$ $y = 1$



VEDIAMO CHE RAZZA DI PUNTI SONO.

- $(0, y)$ $y \in \mathbb{R}$ IN QUESTI PUNTI $f(x,y) = 0$
- PROVIAMO A FARE L'HESSIANO

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(2-x)e^{-x-y} - xy\,e^{-x-y} - xy(2-x)e^{-x-y}$$

$$= e^{-x-y}\left(2y - xy - xy - 2xy + x^2 y\right)$$

$$= e^{-x-y}\left(2y - 4xy + x^2 y\right) = y e^{-x-y}\left(2 - 4x + x^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 e^{-x-y} - x^2(1-y)e^{-x-y} = -e^{-x-y}x^2(1+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x(2-x)e^{-x-y} - xy(2-x)e^{-x-y} =$$

$$x e^{-x-y}(2-x)(1-y)$$

IN $(0,y)$ $\quad H_f$ FA $\begin{pmatrix} 2y e^{-y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$H_f(0,y)$ è semidefinito positivo se $y>0$

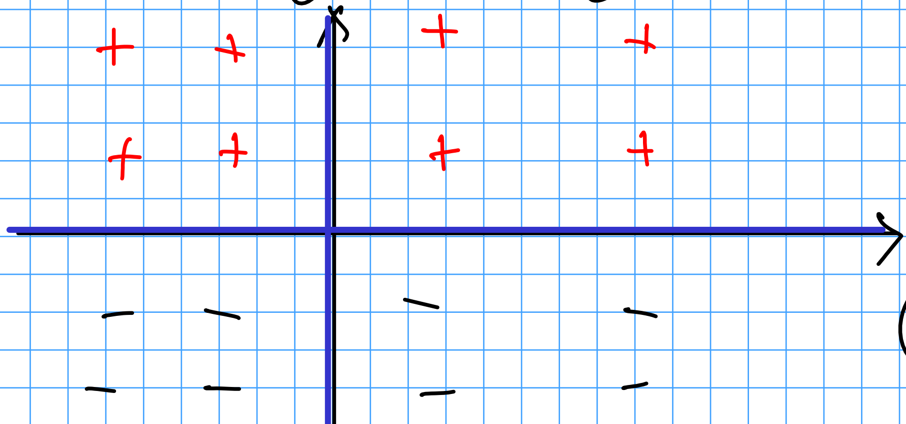
($H_f(0,y)$ è " " negativo se $y<0$

$\Rightarrow$ f è convesso su $\{y>0\}$

f è concavo su $\{y<0\}$

$\Rightarrow$ i punti $(0,y)$ con $y>0$ SONO DI MINIMO

i punti $(0,y)$ con $y<0$ SONO DI MAX



← Torno con lo studio del segno di f

$(0,0)$ NÉ MAX NÉ MINI

INVECE IN $(2,1)$

$$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} e^{-3}\cdot 1 \cdot (2 - 4\cdot 2 + 2^2) , & 0 \\ 0 , & 2^2(1-2)\, e^{-3} \end{pmatrix} =$$

$$e^{-3}\begin{pmatrix} -2 , & 0 \\ 0 , & -4 \end{pmatrix}$$

$\det = (-2)(-4) > 0$

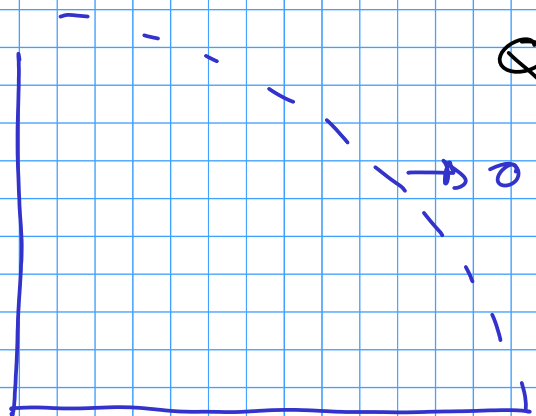
$a_{11} < 0$

(ANZI $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$ entrambi < 0)

PTO DI MAX

• <u>NOTA</u>: NEL PRIMO QUADRANTE $f \geq 0$, $f(0,y) = 0$

$f(x,0) = 0$



Q_1

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to \infty \\ (x,y) \in Q_1}} f(x,y) = 0$$

INFATTI

$$x^2 y\, e^{-(x+y)} \leq (x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} = (*)$$

$x^2 \leq +$ $\quad y \leq \rho$

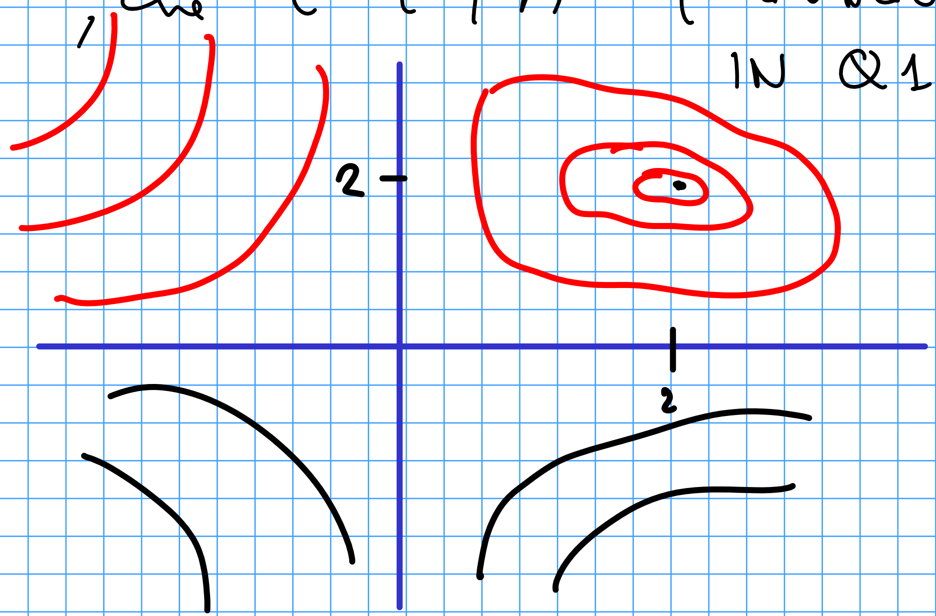
DATO CHE $x+y \geq \sqrt{x^2+y^2}$ se $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$x^2+y^2+2xy \geq x^2+y^2$$

$$2xy \geq 0 \quad \underline{\underline{\text{VERA}}}$$

$$(\star) = \|(x,y)\|^{3/2} e^{-\|(x,y)\|} \to 0 \text{ se } \|(x,y)\| \to +\infty$$

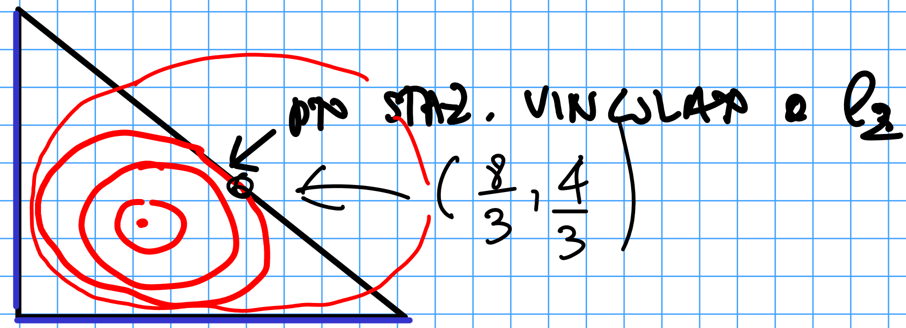
QUESTO COMPORTAMENTO DI f SU $Q_1 \Rightarrow f$ HA MASSIMO SU Q_1, questo max deve essere assunto nell'UNICO PUNTO STAZIONARIO di f su Q_1, che è $(2,1)$ (DUNQUE $(2,1)$ È MAX ASSOLUTO IN Q_1)



CONGETTURA SULLE LINEE DI LIVELLO

• TORNIAMO SU T

IDEA :



cerchiamo i pti staz. vincolati a $\ell_2 = \{x+y=4\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y-4) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y-4) \\ x+y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} xy(2-x)e^{-x-y} = \lambda \\ x^2(1-y)e^{-x-y} = \lambda \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dots \\ xy(2-x)\cancel{e^{-x-y}} = x^2(1-y)\cancel{e^{-x-y}} \\ x+y=4 \end{cases}$$

posso supporre $x>0$

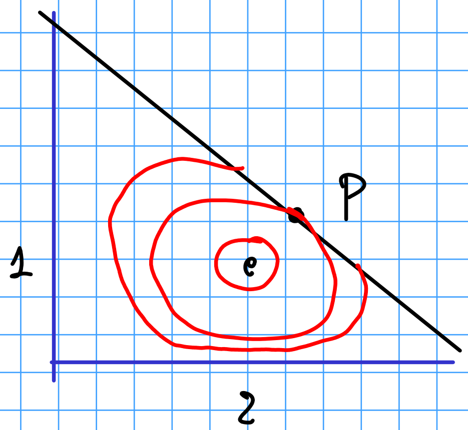
$$\begin{cases} \lambda = \dots \\ 2y - \cancel{xy} = x - \cancel{xy} \\ x+y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dots \\ x = 2y \\ 3y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dots \\ y = 4/3 \quad x = 8/3 \end{cases}$$

IN $P = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ f vale $\left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{12}{3}} = \frac{256}{27} e^{-4}$

che è meno di $f(2,1) = 4e^{-3}$.

$\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ NON È DI MAX

NOTA LA LINEA DI LIVELLO $\left\{f = \frac{256}{27} e^{-4}\right\}$ è tangente a ℓ_2



P è punto di max per f su ℓ_2 (lo vedo dalle linee di livello)

RISULTATO FINALE

$\max_T f = 4e^{-3}$ (assunto in $(2,1)$)

$\min_T f = 0$ (assunto sui lati ℓ_1 e ℓ_2)

· VARIANTE per studiare f sul lato ℓ_2 potevo anche studiare $f(x, 4-x)$ al variare di $x \in [0, 4]$

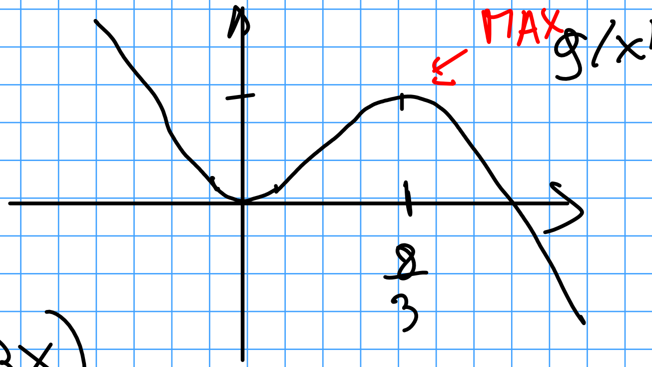
(descrivo ℓ_2 con la curva $(x, 4-x)$, $0 \le x \le 4$)

$$\rightsquigarrow \quad g(x) = x^2(4-x)\,e^{-4}$$

$$g'(x) = 2x(4-x) - x^2$$

$$= x(8-2x-x) = x(8-3x)$$

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{27}e^{-4}$$



SI VEDE CHE $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ è di max sul lato

---

ALTRO ESEMPIO

$$f(x,y,z) = x y^2 z^3 \quad \text{sulla sfera } S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$$

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y^2 z^3 = \lambda\, 2x \\ 2xyz^3 = \lambda\, 2y \\ 3xy^2z^2 = \lambda\, 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

POSSO SUPPORRE $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$

(su $x=0$ / $y=0$ / $z=0$ $f(x,y,z)=0$

mentre ci sono punti in cui $f>0$

e punti in cui $f<0$

$$\begin{cases} 2\lambda = \frac{y^2z^3}{x} \\ 2\lambda = 2xz^3 \\ 2\lambda = 3xy^2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dots \\ y^2 \cancel{z^3} = 2x^2 \cancel{z^3} \\ \cancel{y^2} z^{\cancel{3}\,2} = 3x^2 \cancel{y^2} \cancel{z} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

(I − II),

(I − III)

$$\begin{cases} \lambda = \dots \\ y^2 = 2x^2 \\ 3x^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

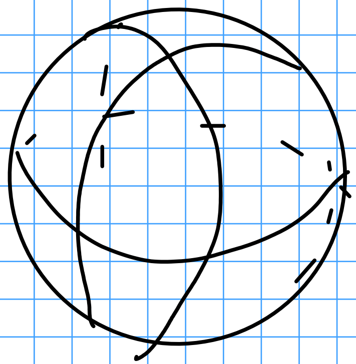
$$\begin{cases} \lambda = \dots \\ z^2 = 3x^2 \\ y^2 = 2x^2 \\ 6x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1/6 \\ y^2 = \frac{1}{3} \\ z^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt6}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt3}$

$z = \pm \frac{1}{\sqrt2}$



I VALORI SONO

$$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2} =$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{12}$$

$\nearrow$ MAX $= \dfrac{\sqrt{3}}{36}$

$\searrow$ MIN $= -\dfrac{\sqrt{3}}{36}$

(Bastava studiare f su $\{x>0,\ y>0,\ z>0\}$; il resto si ottiene per simmetria)

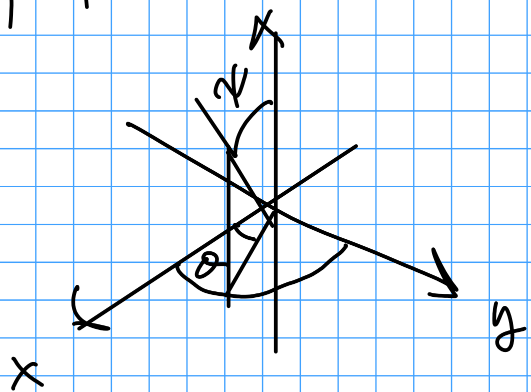
OSS Questo esercizio si potrebbe fare parametrizzando la sfera mediante due angoli: θ, ψ ← angolo con l'asse z

$$x = \cos\theta \sin\psi$$

$$y = \sin\theta \sin\psi$$

$$z = \cos\psi$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \psi \le \pi$$



f " si trasforma in $\tilde{f}(\theta,\psi) = \cos\theta \sin\psi (\sin\theta \sin\psi)^2 \cos^3\psi$

$= \cos\theta \sin^2\theta \sin^3\psi \cos^3\psi = \cos\theta \sin^2\theta \left(\frac{\sin 2\psi}{2}\right)^3$

che va studiata sul rettangolo $R = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le \pi\}$

I punti stazionari interni a R verificano

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = 0 \iff \sin^3\psi \cos^3\psi \left(-\sin^3\theta + 2 \sin\theta \cos^2\theta\right) = 0$

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi} = 0 \quad \cos\theta \sin^2\theta \frac{3}{8} \left(\sin^2\psi\right)^2 \cos 2\psi \cdot 2 = 0$

$\longrightarrow$ (escludendo valori di θ e ψ per cui $\tilde{f} = 0$)

$-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 0 \iff 3\cos^2\theta = 1$

$\cos(2\psi) = 0$

$\Longrightarrow \quad \cos\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \psi = \frac{\pi}{4}$

(θ si ricava con un arccos .. ma va bene)

$$\tilde{f}(\theta,\psi) = \cos\theta\,\sin^2\theta\left(\frac{\sin 2\psi}{2}\right)^3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \pm\frac{\sqrt{3}\;4}{27\;8}$$

ERRORE DI CALCOLO ??

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{54} \quad ??$$

(DOMANI SI RIVEDE)