Analisi Matematica II
Lezione 20
11 novembre 2015

PROBLEMA DEI MAX / MINI "VINCOLATI"

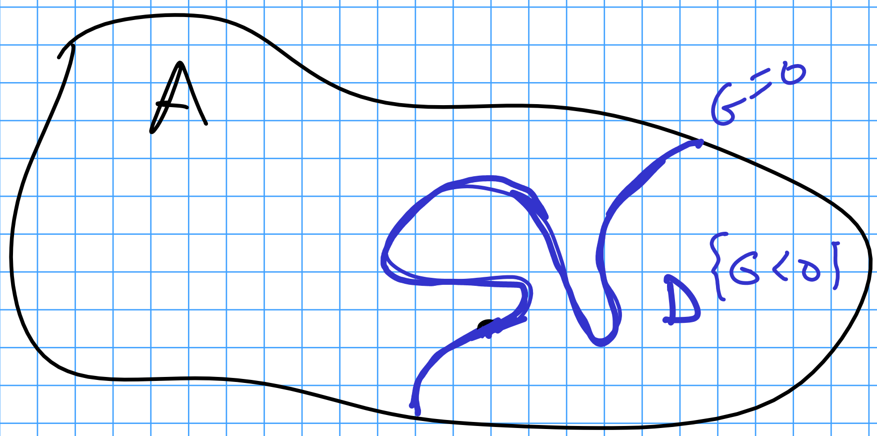
<u>Def.</u> Sia A aperto di $\mathbb{R}^N$ e $D \subset A$.

Dico che D è un dominio regolare chiuso in A

se $D = \{ \cancel{x} \in A : G(x) \leq 0 \}$

per un'opportuna G di classe C^1 tale che

$\nabla G(x) \neq \vec{0}$ per le x con $G(x) = 0$



L'ipotesi $\nabla G(x) \neq \vec{0}$ su $\{G=0\}$ implica che per

ogni punto $x_0 \in \{G=0\}$ l'insieme $\{G=0\}$, vicino

a x_0, è grafico di una $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$

dove i è tale che $\dfrac{\partial G(x_0)}{\partial x_i} \neq 0$

OK $\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{G(x,y,z)} \leq 0$ è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$

perché $\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

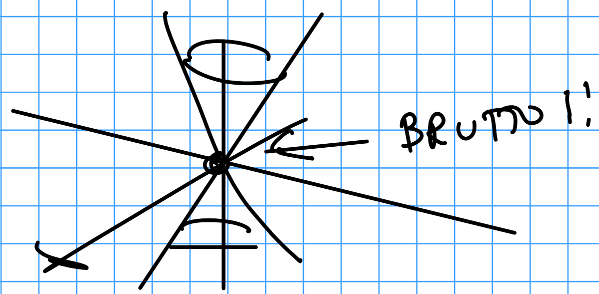
e $\|\nabla G\|^2 = 4x^2+4y^2+4z^2 = 4$ se $(x,y,z)\in\{G=0\}$

NO $\{\underbrace{x^2+y^2-z^2}_{G(x,y,z)} \leq 0\} = D$

$\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$

se prendo $(0,0,0) \Rightarrow \nabla G = 0$ e $(0,0,0)\in\{G=0\}$

Se cerco di capire com'è fatto D vedo che



PROBLEMA

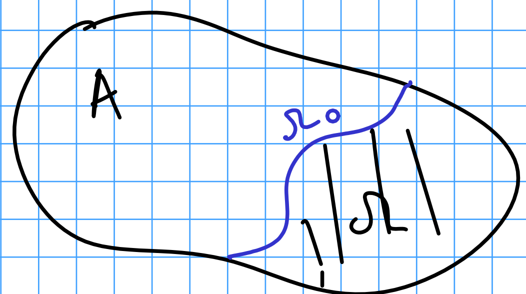
Dato A aperto $\subset \mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Dato $G: A \to \mathbb{R}$ con l'ipotesi

$$\nabla G(x) \neq \vec{0} \quad \text{se} \quad G(x) = 0.$$

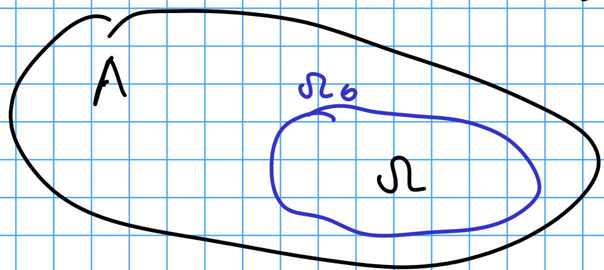
Chiamo $\Omega := \{x \in A : G(x) \leq 0\}$ (DOMINIO REG. ...)

$$\Omega_0 := \{x \in A : G(x) = 0\}$$



<u>NOTA</u> $\partial\Omega = (\partial A \cap \Omega) \cup \Omega_0$

Se $\overline{\Omega} \subset A \Rightarrow \partial\Omega = \Omega_0$



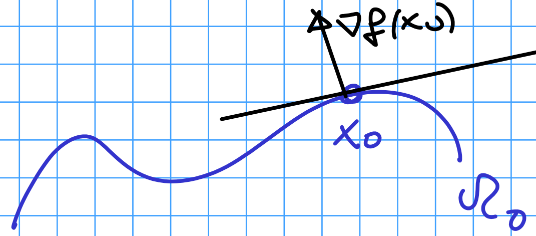
VOGLIO TROVARE INFO SUI PUNTI DI MAX/MIN relativo per f su Ω_0 (poi su Ω)

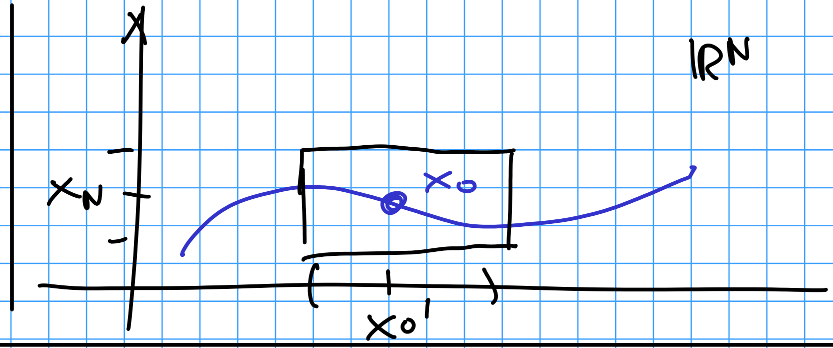
TESI) Se $x_0 \in \Omega_0$ è punto di max/min vol. per f su Ω_0 $\Rightarrow$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$$

- λ si chiama "moltiplicatore di Lagrange"
- un punto $x_0 \in \Omega_0$ in cui valga la relazione sopra (per un λ opportuno) si dice "punto stazionario vincolato a Ω_0" (se $\lambda = 0$ x_0 si dice "punto staz. libero")
- GEOMETRICAMENTE La cond. dice che $\nabla f(x_0)$ è parallelo a $\nabla G(x_0)$. Avevamo visto che $\nabla G(x_0) \perp \Omega_0$ (nel senso che se γ è una qualunque curva regolare che "viaggia" in Ω_0, e $\gamma(t_0) = x_0 \Rightarrow \gamma'(t_0) \perp \nabla G(x_0)$)

DUNQUE la condizione sopra dice che $\nabla f(x_0)$ è perpendicolare a Ω_0

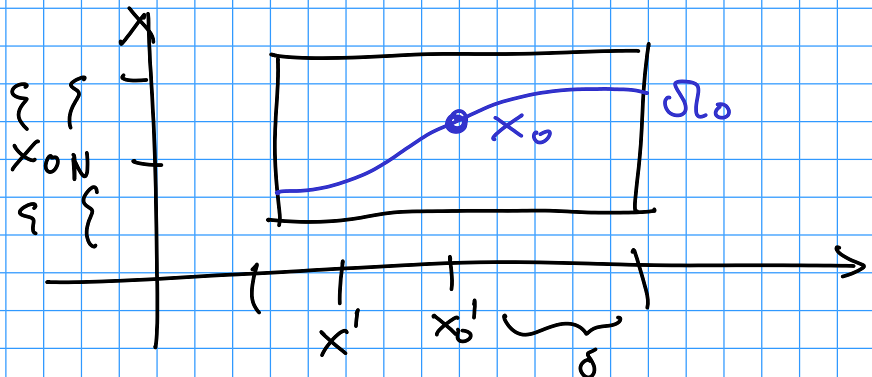




Dim. $x_0 \in \Omega_0$. So che $\nabla G(x_0) \neq \vec{0}$, per esempio $\frac{\partial G(x_0)}{\partial x_N} \neq 0$. Scrivo $x = (x', x_N)$ con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ $x_N \in \mathbb{R}$ e indico $B'(x', r') = \{ x \in \mathbb{R}^{N-1} : \| x - x' \| < r' \}$

Allora per Dini esiste $\delta > 0, \varepsilon > 0$ e una funzione $\varphi : B(x_0', \delta) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Omega_0 \cap B'(x_0', \delta) \times]x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon[= \{ (x', \varphi(x')), x' \in B'(x_0', \delta) \}$$



NOTA

$(x', \varphi(x')) \in \Omega_0$

se $x' \in B'(x_0', \delta)$

CONSIDERO $\qquad f(x', \varphi(x')) = h(x')$

METTIAMO CHE x_0 sia di minimo per f su Z_0

$\Rightarrow \quad x'_0$ è di minimo per h $\left(\dot{h} = h(x_1, \dots, x_{N-1})\right)$

Per Fermat $\quad \nabla h(x'_0) = 0$, cioè $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x'_0) = 0$

per $i = 1, \dots, N-1$. Calcoliamo le derivate parziali di h

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(x') = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x', \varphi(x')) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots x_i, \dots x_{N-1}, \varphi(x'))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x', \varphi(x')) + \frac{\partial}{\partial x_N} f(x', \varphi(x')) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x')$$

Mettiamo $x' = x'_0$ e usiamo Fermat:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_N} f(x_0) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x'_0) = \quad \text{(Dini)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0) + \frac{\partial}{\partial x_N} f(x_0) \left(- \left(\frac{\partial G(x_0)}{\partial x_i} \middle/ \frac{\partial G(x_0)}{\partial x_N} \right) \right)$$

DUNQUE $(i=1 \ldots N-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_u) = \frac{\partial f(x_u)}{\partial x_N} \frac{\frac{\partial G(x_u)}{\partial x_i}}{\frac{\partial G(x_u)}{\partial x_N}} = \underbrace{\frac{\frac{\partial f(x_u)}{\partial x_N}}{\frac{\partial G(x_u)}{\partial x_N}}}_{\text{LO CHIAMO } \lambda} \frac{\partial G(x_u)}{\partial x_i}$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_u) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} G(x_u) \qquad \text{se } i = 1 \ldots N-1$$

se $i = N$ la relazione vale per def. di λ!! DUNQUE

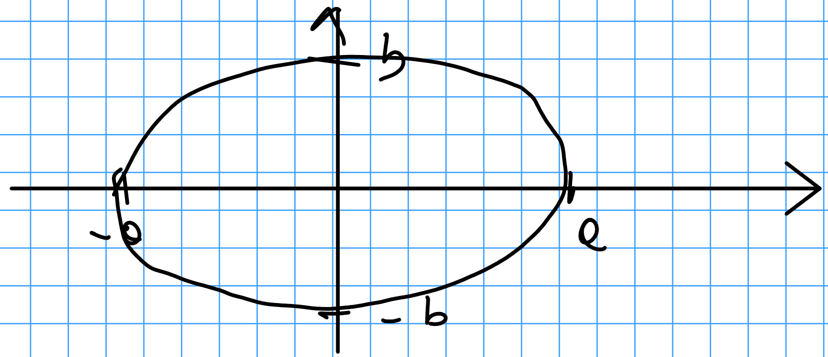
$$\boxed{\nabla f(x_u) = \lambda \nabla G(x_u)}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = xy$$

$$G(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

VOGLIO TROVARE MAX / MIN DI f su $M = \{ G(x,y) = 0 \}$



TALI PUNTI DEVONO VERIFICARE $\nabla f = \lambda \nabla G$

CIOÈ

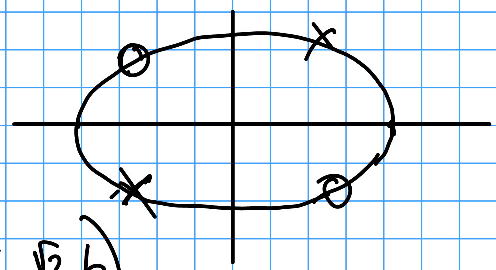
$$\begin{cases} y = \lambda \dfrac{2}{a^2} x \\ x = \lambda \dfrac{2}{b^2} y \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} \nabla f(x,y) = y \vec{i} + x \vec{j} \qquad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \\ \left(\dfrac{\partial xy}{\partial x} = y \, , \, \dfrac{\partial xy}{\partial y} = x \right) \\ \nabla G(x,y) \quad \dfrac{2x}{a^2} \vec{i} + \dfrac{2y}{b^2} \vec{j} \end{cases}$$

RICAVO y dalla I° e $\to$ II° TROVO $x = \lambda^2 \dfrac{4}{a^2 b^2} x \Rightarrow$

$x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$ IMPOSS) $\quad \lambda = \pm \dfrac{ab}{2}$ $\quad \boxed{\lambda = \dfrac{ab}{2}}$

$y = \dfrac{b}{a} x \quad , \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \quad x^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a \qquad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} b$



Se metto $\lambda = -\frac{ab}{2}$ trovo $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} a, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} b\right)$

$\Rightarrow \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a, \frac{\sqrt{2}}{2} b\right) = \frac{ab}{2} \quad \leftarrow$ MASSIMO di xy su M

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a, \frac{\sqrt{2}}{2} b\right) = -\frac{ab}{2} \quad \leftarrow$ MINIMO di xy su M

PER ES. se $a = b = 1$ OTTENGO

$$\max_{x^2+y^2=1} xy = \frac{1}{2}$$