Analisi Matematica II
Lezione 19
10 novembre 2015

$$\boxed{G(x,y) = x y^3 + x^4 y} \qquad \big(G_0(x,y) = G(x,y) - 2 \big)$$

Voglio studiare $\underbrace{M := \{ (x,y) \; : \; G(x,y) = 2 \}} = \{ (x,y) \mid G_0(x,y) = 0 \}$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x,y) = y^3 + 4x^3 y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G(x,y) = 3xy^2 + x^4$$

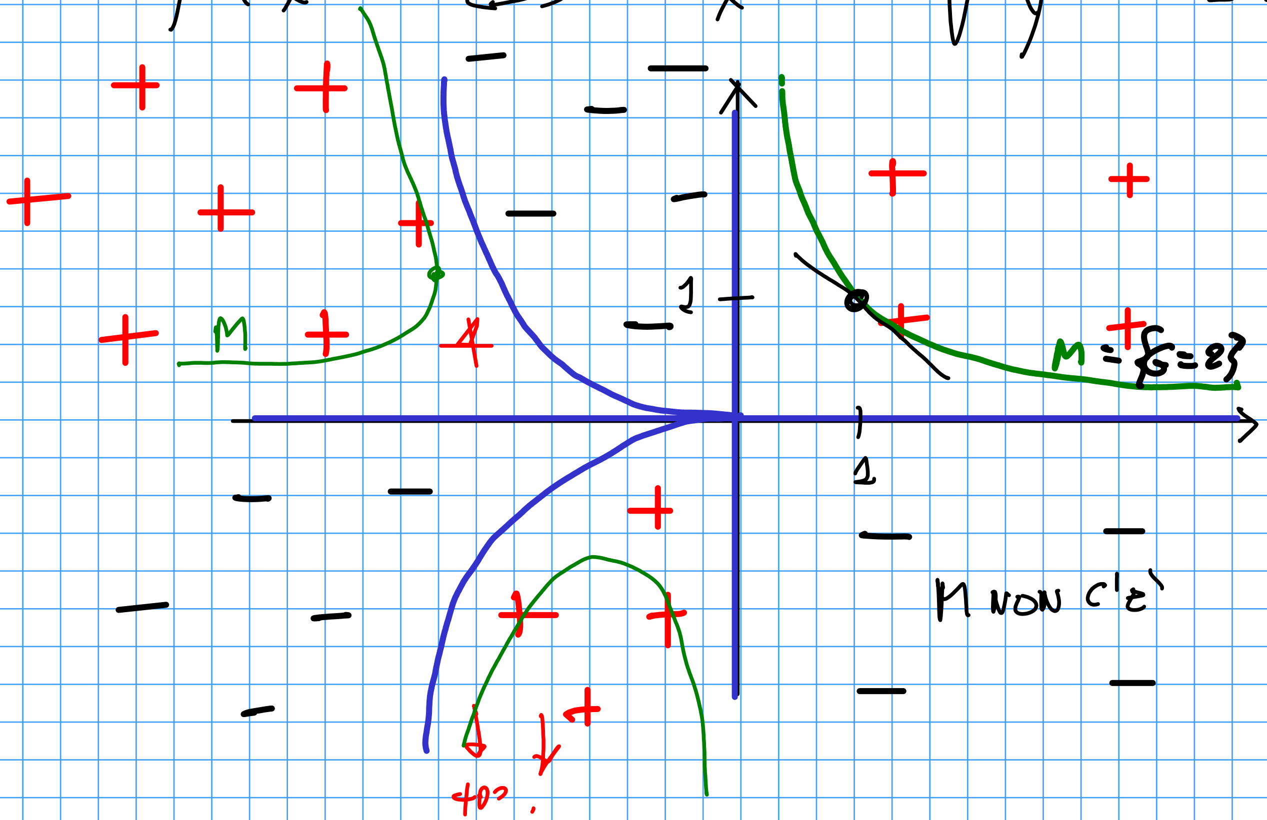
Facciamo un'indagine preliminare. Vediamo chi è

$$M_0 = \{ (x,y) \; : \; G(x,y) = 0 \} = \{ xy^3 + x^4 y = 0 \} =$$

$$\{ x = 0 \} \cup \{ y = 0 \} \cup \{ y^2 + x^3 = 0 \}$$

$$xy^3 + x^4 y = 0 \iff xy(y^2 + x^3) = 0$$

$$y^2 + x^3 = 0 \iff x = -\sqrt[3]{y^2} = -|y|^{\frac{2}{3}}$$



Segno di $G(x,y)$

$M \subset \{G(x,y) > 0\}$

$M \cap M_0 = \emptyset$
perché G è continua

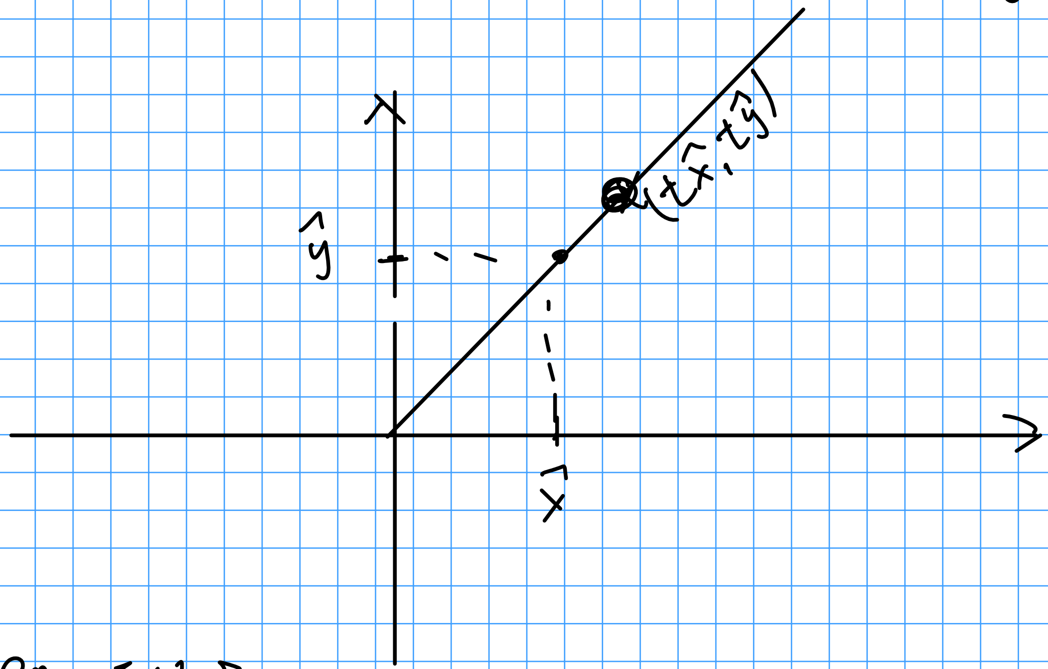
Altro "test": Dati $\hat{x}, \hat{y}$ considero

$$\varphi(t) = G(t\hat{x}, t\hat{y}) = t^4 \hat{x}\hat{y}^3 + t^5 \hat{x}^4 \hat{y}$$
$$= t^4 \hat{x}\hat{y}(\hat{y}^2 + t\hat{x}^3)$$

$\varphi(0) = 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \hat{x} \neq 0 \text{ e } \hat{y} > 0 \\ 0 & \text{se } \hat{x} = 0 \text{ o } \hat{y} = 0 \\ -\infty & \text{se } \hat{x} \neq 0 \text{ e } \hat{y} < 0 \end{cases}$$

VERO?



(Potrei considerare la condizione $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$

VEDO ALLORA CHE

se $\hat{x} > 0$ $\hat{y} > 0$ (I° QUADRANTE) $\exists\ \bar{t}$ tale che

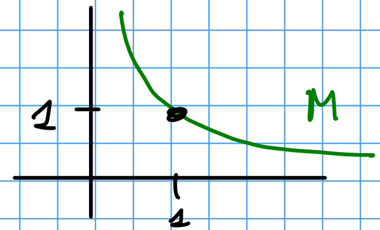
$\varphi'(t) = 0$, cioè la retta $(t\hat{x}, t\hat{y})$ interseca Λ

DI TALI $\bar{t}$ CE N'È UNO SOLO. Se calcolo

$\varphi'(t) \longrightarrow \varphi'(t) = 4t^3 \hat{x} \hat{y}^3 + 5t^4 \hat{x}^4 \hat{y} = t^3 \hat{x} \hat{y} (4 \hat{y}^2 + 5 \hat{x}^3 t)$

Tale derivata è sempre >0 quando $(\hat{x},\hat{y}) \in$ I° quadrante e $t>0$.

DUNQUE, $M \cap \{\text{I° QUADRANTE}\} \simeq$



Usando il teorema del Dini si vede che (nel I° Q.) M è descrivibile come grafico $y=f(x)$ o anche $x=g(y)$ perché sia $\frac{\partial}{\partial x} G(x,y)$ sia $\frac{\partial}{\partial y} G(x,y)$ sono >0 in tutti i punti del I° Q.

Tali funzioni f / g sono definite su tutto $\{x>0\}$ / $\{y>0\}$

PER ESEMPIO $(1,1) \in M$ $\quad (G(1,1)=2)$

e allora (da Dini) vedo che

$$f(1)=1 \quad \text{e} \quad f'(1) = -\frac{\partial G}{\partial x}(1,1) \Big/ \frac{\partial}{\partial y} G(1,1) = -\frac{1^3+4\,1^3\,1}{3\,1\cdot 1^2+1^4}$$

$= -\frac{5}{4}$

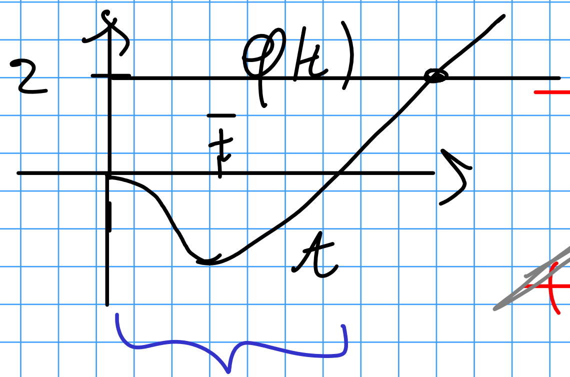
Mentre $g(1) = 1$ e $g'(1) = -\frac{4}{5}$ (scambio x e y)

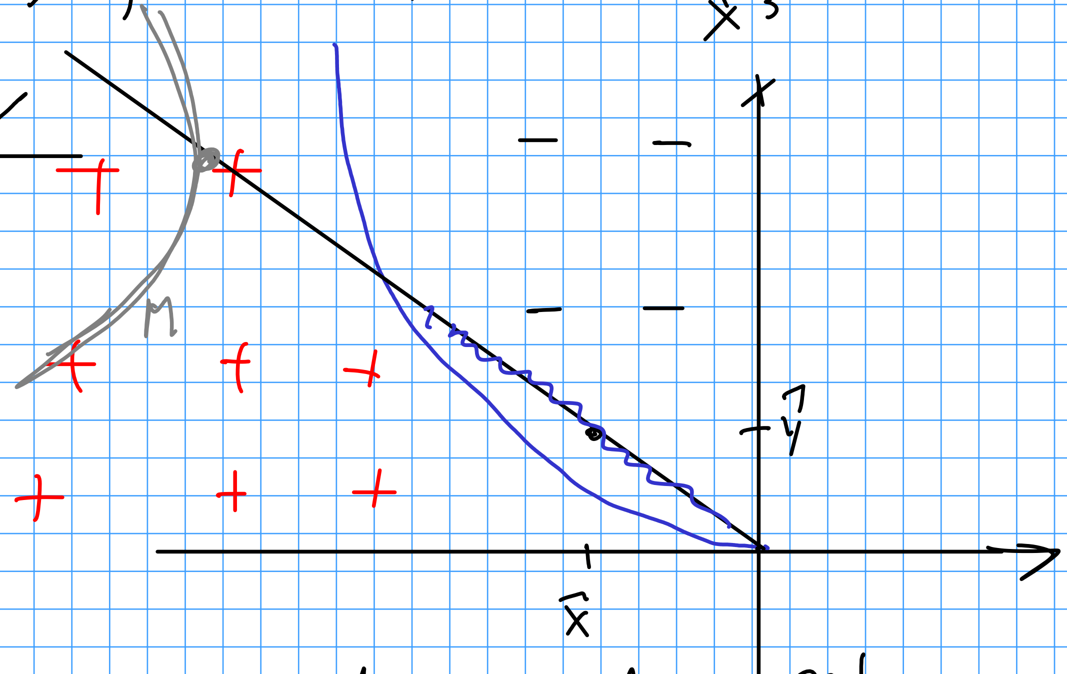
Mi metto nel IV^{o} QUADRANTE. ABBIAMO VISTO

$\varphi(0) = 0$ $\qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$

$\varphi'(t) = t^3 \hat{x}\hat{y}(\hat{y}^2 + t\hat{x}^3) = 0 \iff \bar{t} = \bar{t} := -\frac{\hat{y}^2}{\hat{x}^3} \ (>0)$

$\Longrightarrow$





Di nuovo M incontra ogni retta uscente dall'origine

VEDIAMO SE POSSO ESPRIMERE M come

grafico $\quad y = f(x)$ (i) $\quad$ oppure $\quad x = g(y)$ (ii)

Per (i) mi serve che non si possa risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 2 \end{cases}$$

(per poter applicare Dini)

$\Updownarrow$ $\quad$ (cerco soluzioni nel II° Q. $x<0,\ y>0$)

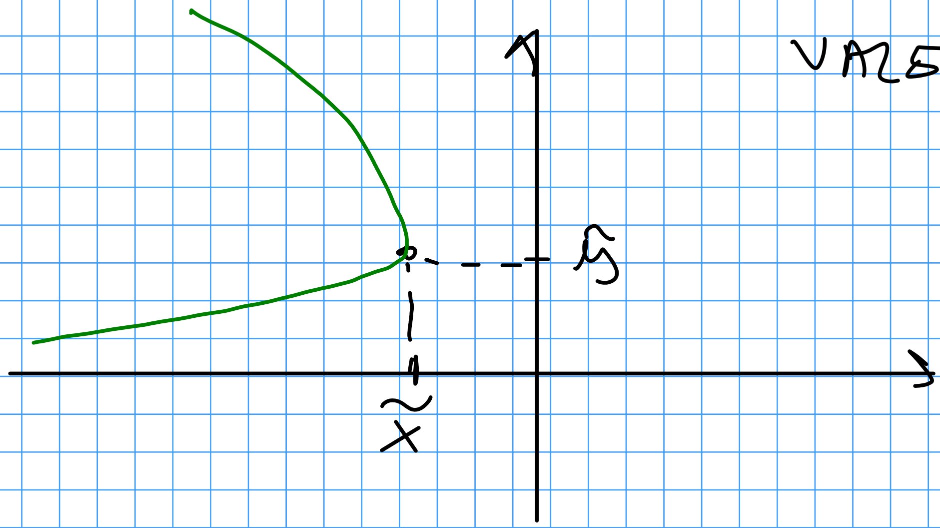
$$\begin{cases} 3xy^2 + x^4 = 0 \\ xy\,(y^2 + x^3) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \;/\; x = -\sqrt[3]{3y^2} \\ -\sqrt[3]{3y^2}\, y\,(y^2 + -3y^2) = 2 \end{cases}$$

NO

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{3y^2} \\ (-2y^2)\left(-\sqrt[3]{3}\; y^{\frac{2}{3}+1}\right) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt[3]{3y^2} \\ \cancel{2}\sqrt[3]{3}\; y^{\frac{11}{3}} = \cancel{2}\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{y^2} \\ y^{11/3} = 3^{-1/3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cdot\ - \\ y^{11} = 1/3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = \sqrt[11]{1/3} = \tilde{y} \\ x = -\sqrt[3]{y^2} = \tilde{x} \end{array}$$

TROVO UN PUNTO SOLO $(\tilde{x}, \tilde{y})$ IN CUI NON VALE DINI



MI ASPETTO CHE $(\tilde{x}, \tilde{y})$ SIA COME NEL DISEGNO

(Cerco M come $x = g(y)$)

NELL'ALTRO VERSO

SE PROVO A APPLICARE DINI (CERCO $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$) $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ G(x,y) = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} y^3 + 4x^3 y = 0 \\ xy(y^2 + x^3) = 2 \end{cases} \quad (\star)$$

NON DOVREBBE AVERE SOLUZIONI NEL II° Q.

$\Longrightarrow$ $M = \{ x = g(y) \}$

DOMANI

VEDIAMO CHE IN EFFETTI (A) non ho sol. nel II° Q.

$$(\star) \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \quad y^2+4x^3=0 \\ xy(y^2+x^3)=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \\ -\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}}\, y\left(y^2-\frac{y^2}{4}\right)=2 \end{cases}$$

NO

$$\begin{cases} x = \ldots \\ \underbrace{-\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}}\, y\, \frac{3}{4}}_{\text{NEGATIVA}}\, y^2 = 2 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE PER $y>0$

QUINDI $M \cap \{\text{II}^\circ \text{ Q.}\} =$ grafico $x = g(y)$

VEDIAMO $M \cap \{\text{III}^\circ \text{ Q.}\}$

Dico che M è un grafico $y = f(x)$. Per vederlo mostro che non ci sono soluzioni di

$$\begin{cases} G(x,y)=2 \\ \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)=0 \\ x<0 \quad y<0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} xy(y^2+x^3)=2 \\ 3xy^2+x^4=0 \\ x<0 \quad y<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(y^2+x^3)=2 \\ x=0 \ \text{No} \quad \text{oppure} \quad 3y^2+x^3=0 \\ x<0 \quad y<0 \end{cases}$$

$\nexists P$

$$\begin{cases} -\sqrt[3]{3y^2}\, y\,(y^2-3y^2)=2 \\ x=-\sqrt[3]{3y^2} \\ x<0 \quad y<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[3]{3y^2}\, y\, 2y^2 = 2 \end{cases}$$

IMPOSS. perché $y<0$

IN EFFETTI $M \cap \{III^\circ\ Q.\}$ è un grafico $y=f(x)$

DA QUESTO NON SEGUE ANCORA CHE $M \cap \{III^\circ\ Q\} \neq \emptyset$

IN REALTÀ $M \cap \{III^\circ\ Q.\} \neq \emptyset$. Per vederlo posso ragionare in più modi:

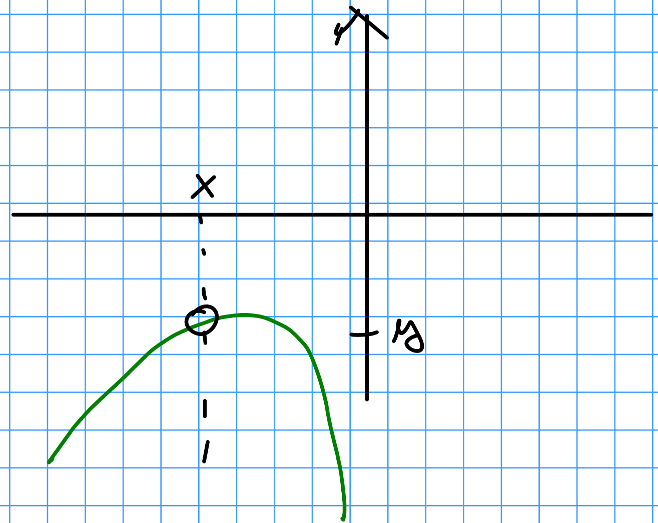
(a) Fisso $x<0$ e guardo $h(y)=G(x,y)=xy(y^2+x^3)$

$h(0)=0$ $\qquad h(-\infty)=+\infty$ (VINCE $xy^3 \to +\infty$ se $y\to-\infty$)

Per il th. degli zeri, $\forall x<0\ \exists y<0$ tale che $h(y)=2$

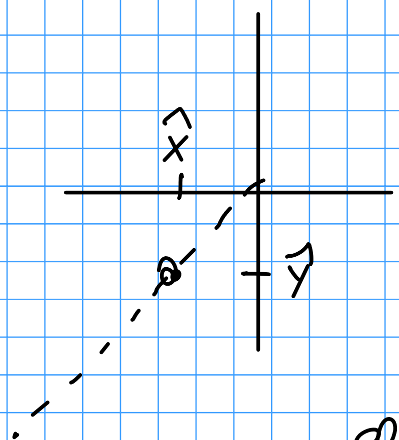
SI PUÒ VEDERE CHE questo y è UNICO (LASCIAMO

PERDERE ..) e quindi M è fatto così:



(b) Posso anche cercare le intersezioni di M con le rette per l'origine. Come ieri considero

$$\varphi(t) = G(t\hat{x}, t\hat{y}) = t^4 \hat{x} \hat{y}^3 + t^5 \hat{x}^4 \hat{y} \qquad (t \geq 0)$$



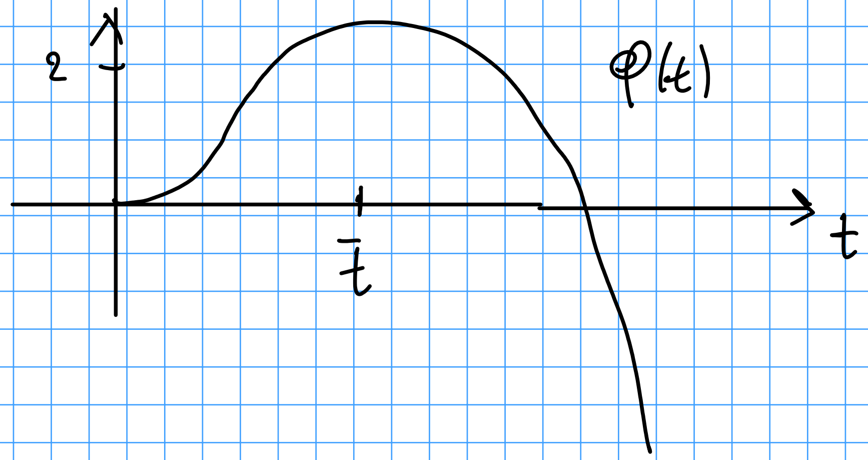
$$\varphi(0) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = -\infty$$

$$\varphi'(t) = 4t^3 \hat{x} \cdot \hat{y}^3 + 5t^4 \hat{x}^4 \hat{y} =$$

$$t^3 \hat{x} \hat{y} \left(4 \hat{y}^2 + 5 \hat{x}^3 t\right)$$

$$\varphi'(t) = 0 \iff t = 0 \ / \ t = \bar{t} := -\frac{4}{5} \frac{\hat{y}^2}{\hat{x}^3}$$

$\varphi'(t) > 0$ se $t < \bar{t}$ $\qquad$ $\varphi'(t) < 0$ se $t > \bar{t}$



MI SERVE CHE $\varphi(\bar{t}) \geq 2$

$$\varphi(\bar{t}) = \left(-\frac{4}{5}\frac{\hat{y}^2}{\hat{x}^3}\right)^4 \hat{x}\,\hat{y}^3 + \left(-\frac{4}{5}\frac{\hat{y}^2}{\hat{x}^3}\right)^5 \hat{x}^4\,\hat{y} =$$

$$\frac{4^4}{5^4}\frac{\hat{y}^8}{\hat{x}^{12}}\hat{x}\,\hat{y}^3 - \frac{4^5}{5^5}\frac{\hat{y}^{10}}{\hat{x}^{15}}\hat{x}^4\,\hat{y} =$$

$$\frac{4^4}{5^4}\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)^{11}$$

se impongo $\varphi(\bar{t}) \geq 2$

trovo

$$\frac{\hat{y}}{\hat{x}} \geq \sqrt[11]{2\,\frac{5^4}{4^4}\,5} =: \bar{m}$$

COSA SIGNIFICA?

M interseca tutte le

rette $y = mx$ con $m \geq \bar{m}$

(nel $\overline{III}^{\circ}$ Q.)