Analisi Matematica II
Lezione 18
9 novembre 2015

Funzioni omogenee.

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dico che f è omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$

se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ $\forall t > 0$

Per esempio: (a) $f(x) = \|x\|$ è omogenea di grado 1

dato che, $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ $(= t\,\|x\|$ se $t>0)$

(b) $f(x,y,z) = x^2 yz + z^2 y^2$ è omogenea di grado 4

Teorema Se f è omogenea di grado α, e f è C^1 (differenziabile con df continuo) $\Longrightarrow$

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Dim. Se f è α-omogenea, allora

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \qquad \forall t > 0$$

FISSATO x

Deriviamo rispetto a t:

$$\nabla f(tx) \cdot x = \alpha t^{\alpha-1} f(x) \qquad \forall t>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Metto $t=1 \Rightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$

~~Altro esempio~~ $f(x,y) = a x^2 + b y^2 + c x y$

omogenea di grado 2:

$$f(tx, ty) = a(tx)^2 + b(ty)^2 + c(tx)(ty)$$
$$= t^2 (a x^2 + b y^2 + c x y)$$

Se calcolo le derivate:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + cy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2by + cx$$

$$\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y =$$

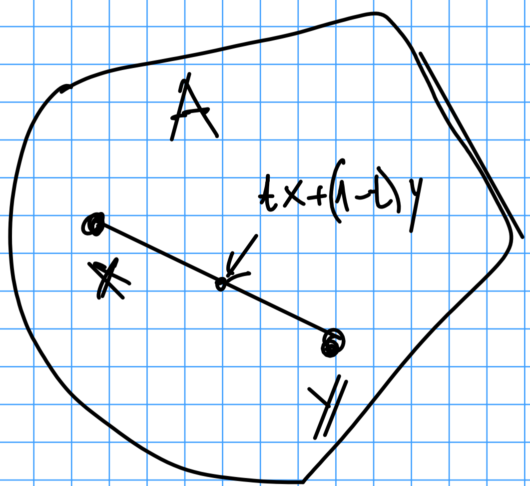
$$(2ax+cy)x + (2by+cx)y =$$
$$2ax^2 + cxy + 2by^2 + cxy = 2(ax^2+by^2+cxy) = 2f(x,y)$$

TORNA

FUNZIONI CONVESSE IN PIÙ VARIABILI

RICORDO CHE $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice <u>convesso</u> se

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \text{ e } \forall\, t \in [0,1] \qquad t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in A$$



al variare di $t \in [0,1]$ descrive il segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

<u>Def.</u> Se A è convesso e $f : A \to \mathbb{R}$ verifica:

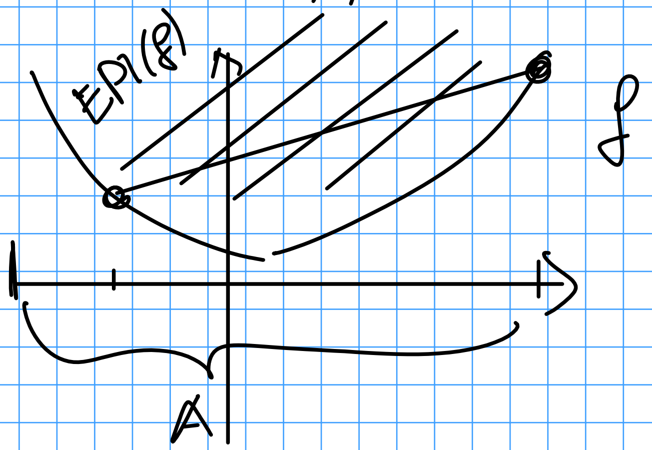
$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A,\ \forall t \in [0,1] \qquad f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \le t f(\mathbf{x}) + (1-t) f(\mathbf{y})$$

SI VEDE CHE LA DEF. SOPRA EQUIVALE DIRE CHE

$\mathrm{EPI}(f)$ è un insieme convesso in $\mathbb{R}^{N+1}$

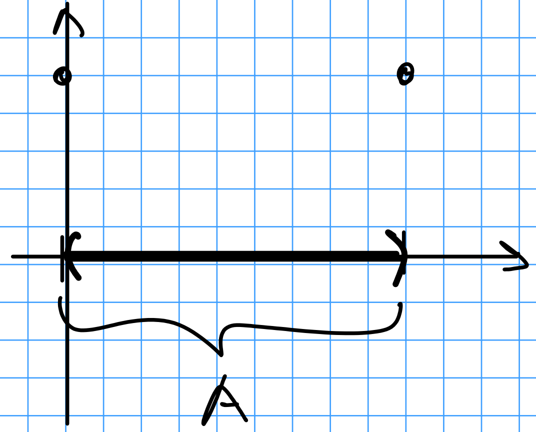
dove $\mathrm{EPI}(f)$, detto epigrafico di f, è l'insieme

$$\{ (x, y) \quad x \in A,\ y \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq y \}$$



<u>PROPRIETÀ</u> DELLE FUNZIONI CONVESSE (NO DIM.)

(a) $f : A \to \mathbb{R}$ convessa $\Rightarrow$ f è continua su $\mathrm{int}(A)$ (non è detto che sia continua nei punti di ∂A)



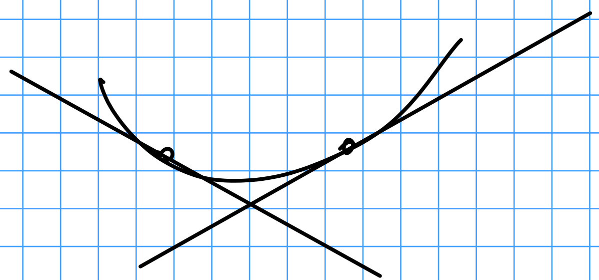
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

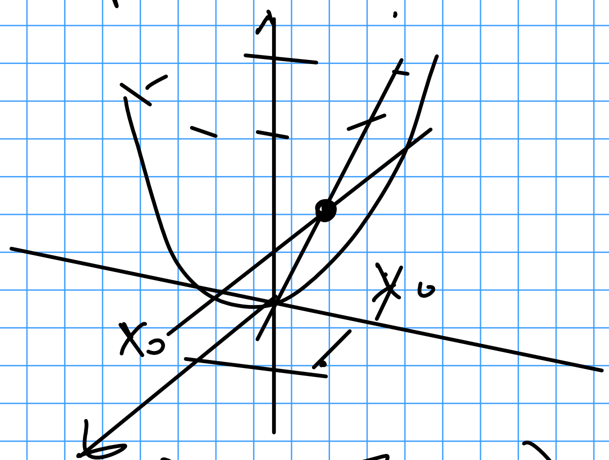
CONVESSA, DISCONTINUA AGLI ESTREMI

(b) $f: A \to \mathbb{R}$ A aperto convesso,

f C^1. ALLORA f convessa $\iff$

"il grafico di f sta sopra il grafico del piano tangente, in cui qualunque punto")





ANALITICAMENTE:

$\forall\, x, x_0 \in A$ $\qquad f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{EQ. PIANO TANG.}}$

(c) Se $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto convesso f C^2.

Allora f è convessa $\iff$

$Hf(x)$ è semidefinito positivo $\forall x \in A$

(d) (segue dalla b)). Se $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa
f è C^1

ALLORA.. x_0 è un punto stazionario per f

$$\Updownarrow$$

x_0 è punto di minimo assoluto per f.

(b1) Se $f : A \to \mathbb{R}$ è C^1. Allora f è convessa

$\iff$ $\forall\, x_1\ x_2$

$$\left(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\right) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0$$

" ∇f è un operatore monotono "

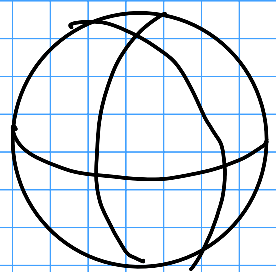
(se fossi in una variabile $\to$ $f'(x)$ è crescente!

FUNZIONI IMPLICITE

Capita spesso di avere una funzione $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (o $G: A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^N$)

e di dover studiare l'insieme $M = \{x \in A : G(x) = 0\}$

Per esempio $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. IN QUESTO CASO $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è la sfera unitaria



DESCRIZIONE IMPLICITA DI M: dato $P \in \mathbb{R}^3$ posso vedere se $P \in M$ o $P \notin M$ — però non ho una "regola" che mi generi tutti i punti di M.

Posso, in questo caso, descrivere M come "grafico" di una funzione – IN REALTÀ come unione di due grafici:

$$A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} \quad \text{e}$$

$$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

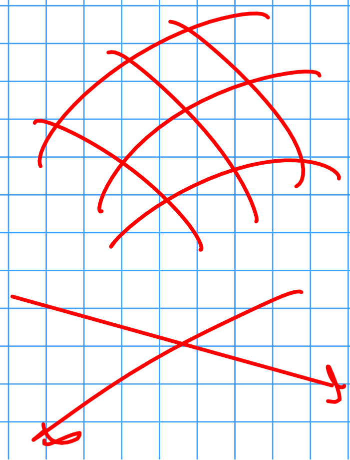
$$f_2(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Il grafico di f_1 è la "calotta superiore"

$$M^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \ge 0\}$$

DESCRIZIONE ESPLICITA

MI CHIEDO IN GENERALE SE $M = \{G(x)=0\}$ sia il grafico di una funzione "$f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$"



Perché sia vero devo avere una derivata parziale di G che sia $\neq 0$

$\simeq$

TEOREMA (Dini)

Sia A aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$

(i punti di A sono delle coppie $(\underline{x}, y)$ con $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}$)

Sia $G : A \to \mathbb{R}$ e poniamo

$$M := \{ (\underline{x}, y) \in A \ : \ G(\underline{x}, y) = 0 \}$$

Supponiamo G di classe C^1, $(\underline{x}_0, y_0) \in M$ e che

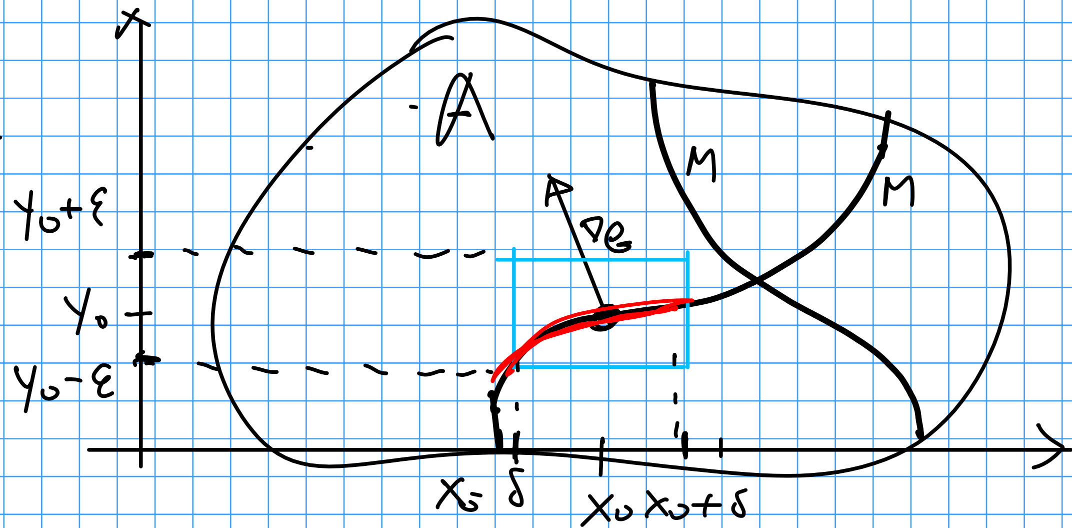
$$\frac{\partial G}{\partial y}(\underline{x}_0, y_0) \neq 0$$

ALLORA "vicino a $(\underline{x}_0, y_0)$ posso ESPLICITARE y in termini di $\underline{x}$"

IN TERMINI RIGOROSI:

$\exists\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\underbrace{B(\underline{x}_0, \delta) \times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[}_{Q_{(x_0, y_0)}(\varepsilon, \delta)}$$



$Q(x_0, y_0)(\varepsilon, \delta) \subset A$,

ed esiste $f: \quad B(x_0, \delta) \longrightarrow]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ tale che

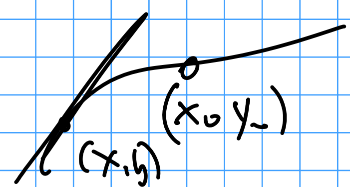
~~tale~~ che

$$M \cap Q(x_0, y_0)(\varepsilon, \delta) = \{(x, f(x)) : x \in B(x_0, \delta)\}$$

INOLTRE f è C^1 e si ha: $\forall (x, y) \in M \cap Q$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)}$$

$$(y = f(x))$$



DIMOSTRAZIONE QUANDO N=2

$A \subset \mathbb{R}^2 \qquad G: A \to \mathbb{R}$ differenziabile.

$(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) > 0 \qquad \left(\begin{array}{l} <0 \text{ si fa nello} \\ \text{stesso modo} \end{array}\right)$$

VOGLIO DIM. CHE $\exists\ \varepsilon > 0$ $\delta > 0$ $\exists\ f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\to\ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ tale che

$$\{ G(x,y) = 0,\ |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \varepsilon \} =$$

$$\{ (x, f(x)) : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

(a) Prendo (ε, δ) in modo che

$$Q(\varepsilon, \delta) \left(:=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\right) \subset A$$

e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y) \in Q(\varepsilon, \delta)$

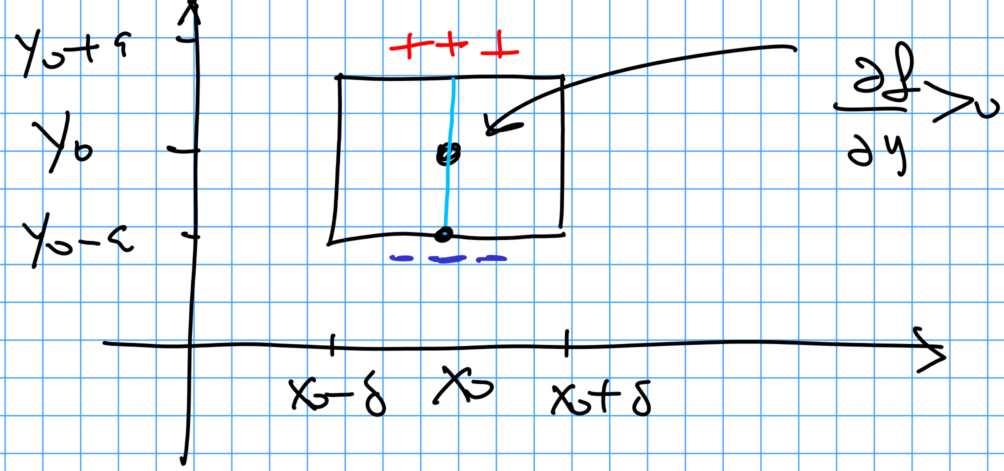
(PERMANENZA DEL SEGNO)

(b) Se guardo $G(x_0, y)$ vedo che è strett. crescente,

$G(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$

$G(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$

$G(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$



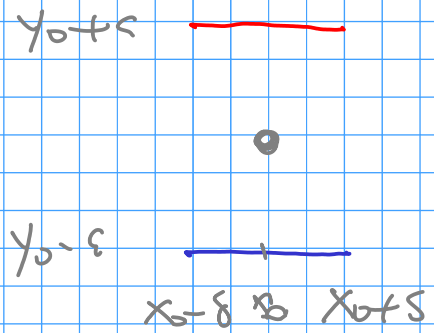
(c) Dato che $G(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \Rightarrow$ trovo $\delta' \leq \delta$ tale

che $G(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$

(Permanenza del segno) Analogamente trovo $\delta'' \leq \delta$

tale che $G(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta'', x_0 + \delta''[$

Prendo il minimo tra δ' e δ' e lo chiamo di nuovo δ



$\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ in tutto il rettangolo

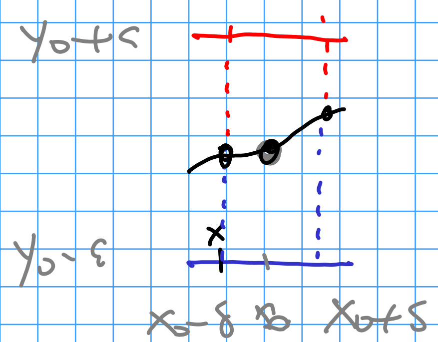
$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$

(d) Per il teorema degli zeri, preso $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

esiste $y \in]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$ tale che $G(x,y)=0$

Dato poi che $y \to G(x,y)$ è strettamente crescente

di tali y ce n'è uno e uno solo.



← TROVO UNA FUNZIONE $y=f(x)$

SE RIGUARDO CIO' CHE HO FATTO VEDO CHE:

(★) $\forall (\varepsilon,\delta)$ tali che $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ in $Q(\varepsilon,\delta)$

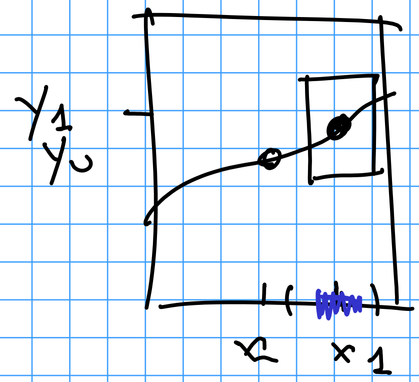
esiste $\delta' \leq \delta$ tale che $\forall x \in]x_0-\delta', x_0+\delta'[$

esiste unico $y \in]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$ con $(x,y) \in M$

$(G(x,y)=0)$

(e) Dimostro che f è continua.

Prendiamo $x_1 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $y_1 = f(x)$ $\in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$



VOGLIO DIMOSTRARE CHE f è continua in x_1

Prendo $\varepsilon' > 0$ e considero il quadrato $Q(x,y)(\varepsilon', \delta')$ con δ' tale che $]x_1 - \delta', x_1 + \delta'[\subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

PER QUANTO DETTO SOPRA $(\star)$

esiste $\delta'' \leq \delta'$ per cui

$$\forall x \in]x - \delta'', x + \delta''[\ \exists \text{ UNICA } y \in]y - \varepsilon', y + \varepsilon'[$$

tali che $G(x,y) = 0$

MA PER L'UNICITÀ DI y deve essere $y = f(x)$

HO DIMOSTRATO ALLORA CHE

dato $\varepsilon' > 0$ $\exists\, \delta''$ tale che

$\forall x \in]x_1 - \delta'', x_1 + \delta''[\Rightarrow f(x) \in]y_1 - \varepsilon', y_1 + \varepsilon'[$

CIOE' f è continua in x_1 !!

(f) RIMANE DA DIM. CHE f è derivabile

e che
$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(x, f(x))}{\frac{\partial}{\partial y} G(x, f(x))}$$

Se do per buono che $f'(x)$ esiste, allora la formula sopra è conseguenza delle regole di derivazione:

$$0 = G(x, f(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx} G(x, f(x)) = 0$$

APPLICANDO LE FORMULE:
$$\frac{d}{dx} G(x, f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} G(x, f(x))\, f'(x)$$

(C'È LA COMPOSIZIONE DI G sulla curva

$$\gamma(x) =: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} G(\gamma(x)) = \nabla G(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) =$$

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial G}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial G}{\partial y} f'(x) \;)$$

Se deve venire zero si ricava

$$f'(x) \frac{\partial}{\partial y} G(x, f(x)) = - \frac{\partial}{\partial x} G(x, f(x)) \quad \Rightarrow \text{FORMULA}$$

IN REALTÀ IO NON SO CHE $f'(x)$ esiste PERÒ SI FA LO STESSO... (LASCIAMO PERDERE QUESTO DETTAGLIO)

ESEMPIO $\quad G(x,y) = x^3 y + x y^4 - 2$

VOGLIO STUDIARE $M = \{ G(x,y) = 0 \} = \{ x^3 y + x y^4 = 2 \}$

NOTO CHE $(1,1) \in M$

VEDIAMO SE M è un grafico "vicino al punto $(1,1)$"

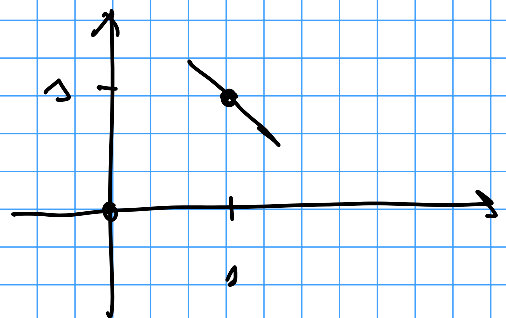
Devo calcolare $\frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = \left(x^3 + 4xy^3\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1+4=5>0$

EFFETTIVAMENTE POSSO ESPLICITARE $y=f(x)$ VICINO A $(1,1)$. NATURALMENTE $f(1)=1$

INOLTRE

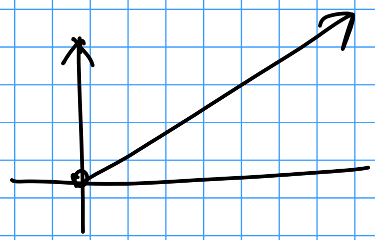
$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial}{\partial y}G(1,1)} = \frac{-\left(3x^2y+y^4\right)_{\substack{x=1\\y=1}}}{5}$$

$$= -\frac{4}{5}$$



<u>OSS</u> $G(0,0)=0$. Se fisso una direzione $\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$ e prendiamo

$(t>0)$ $\quad G(t v_x, t v_y) = t^3 v_x^3 + t^4 v_x v_y^3 = \varphi(t)$



$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi'(t) = 3t^2 v_x^3 + 4t^3 v_x v_y^3$

$\varphi'(t) = 0$ se $t = 0$ oppure

$3 v_x^3 + 4 t v_x v_y^3 = 0$

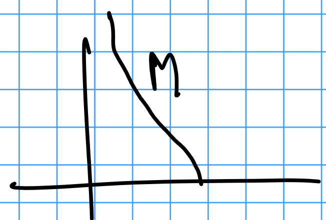
$\iff \quad t = -\dfrac{3 v_x^3}{4 v_x v_y^3}$

(purché $v_x \neq 0$ $v_y \neq 0$)

SE $\vec{v}$ è nel I° quadrante, $v_x > 0$ $v_y > 0$

$\varphi(t)$ è strett. crescente e tende a $+\infty$ $\Rightarrow$

PASSA PER 2 UNA e UNA SOLA VOLTA



CONTINUA . . . .