Analisi Matematica II
Lezione 17
4 novembre 2015

ESERCIZI SU PTI STAZIONARI / MAX / MIN (REL.)

1) $4xy - x^2 - y^4$

2) $\dfrac{1}{x^2+y^2} + 2xy$

3) $y^2 + \dfrac{16}{\sqrt{1+y^2-x^2}}$

4) $e^{x^2+y^2-1} - 2xy$

1) $f(x,y)\ 4xy - x^2 - y^4$

TROVARE I PTI STAZIONARI E DIRE SE SONO PTI DI MAX / MIN / SELLA

- Dominio $= \mathbb{R}^2$
- Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4y - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y^3$$

PTI STAZ. RISOLVONO IL SISTEMA

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 2y = y^3 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} y = 0 \qquad \text{OPPURE} \\ 2 = y^2 \iff y = \pm\sqrt{2} \end{array}$$

QUINDI HO TRE PUNTI : $(0,0)$

$(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \qquad (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

PER VEDERE LA NATURA DI QUESTI PUNTI CALCOLO GLI HESSIANI

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 4$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

CALCOLO $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ determinante $= -2 \cdot 0 - 4 \cdot 4$
$= -16 < 0$

DUNQUE $(0,0)$ è punto di sella.

CALCOLO $H_f(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (lo stesso vale in $-(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$)

$$\parallel$$

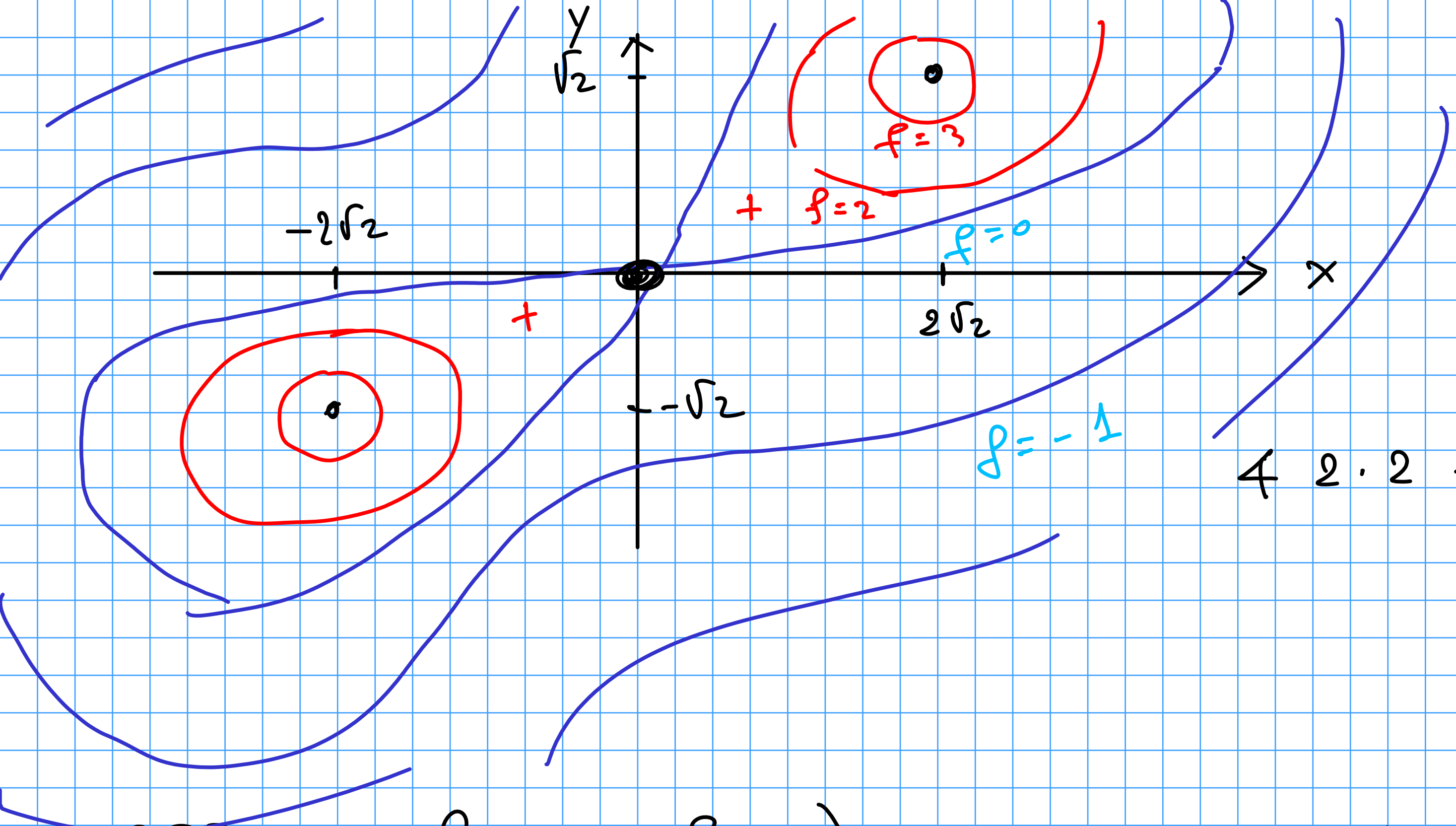
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -24 \end{pmatrix}$$

determinante $= (-2)(-24) - 4 \cdot 4 =$
$48 - 16 > 0$

$a_{11} = -2 < 0$

$H_f(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è def. negativo $\Rightarrow$ $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è punto di max (relativo)

Lo stesso vale in $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



$$f(0,0)=0$$

$$f(2\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4$$

$$4\ 2\cdot 2 - 8 - 4 = 4$$

– <u>OSS</u> $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = -\infty$ INFATTI

$$f(x,y) = 4xy - x^2 - y^4$$

$$xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow f(x,y) \le 2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^4$$

$$= x^2 + 2y^2 - y^4$$

BRUTTO

non mi serve

FACCIO UN CALCOLO PIÙ FURBO

$$xy = \frac{x}{2} \cdot 2y \leq \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} 4y^2 = \frac{x^2}{8} + 2y^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \leq \frac{x^2}{8} + 2y^2 - x^2 - y^4 = -\frac{7}{8}x^2 - y^4 + 2y^2$$

SI HA $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \underbrace{-\frac{7}{8}x^2 - y^4 + 2y^2} = -\infty$

PERCHÉ se $\|(x,y)\| \to \infty \wedge$ uno tra x^2 e y^2 va a $+\infty$
$x^2 + y^2 \to +\infty$

PER IL CONFRONTO ANCHE $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = -\infty$

- ALLORA $f(x,y)$ HA MASSIMO SU TUTTO $\mathbb{R}^2$

INFATTI, se $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = -\infty \quad \Rightarrow$

$F := \{(x,y) : f(x,y) \geq 0\}$ È LIMITATO

(APPLICANDO LA DEF. DI LIMITE TROVO CHE $\exists R > 0$

tale che per tutte le (x,y) con $\|(x,y)\| \geq R \Rightarrow f(x,y) \leq 0$

$\Rightarrow \quad F \subset B(0, R)$ dunque F è limitato)

INOLTRE F È CHIUSO perché f è continua

(FATTO GENERALE : (1) Se f è continua $\Rightarrow$ gli insiemi

$\{ f(x,y) \leq c \}$ $\{ f(x,y) \geq c \}$ $\{ a \leq f(x,y) \leq b \}$

SONO CHIUSI

(2) $\{ f(x,y) < c \}$ $\{ f(x,y) > c \}$ $\{ a < f(x,y) < b \}$

SONO APERTI)

Se F è limitato e chiuso, usando Weierstrass $\Rightarrow$

f ha massimo in F, cioè esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$ tale che

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in F$$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ è di massimo per f su tutto $\mathbb{R}^2$

INFATTI $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ (perché $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$)

e se $(x, y) \notin F \Rightarrow f(x,y) < 0 \Rightarrow$

$$f(x,y) < 0 \leq f(\bar{x}, \bar{y})$$

IN DEFINITIVA $f(x,y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

cioè $(\bar{x}, \bar{y})$ è pto di max per f su $\mathbb{R}^2$.

FATTO GENERALE Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, continua e

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} f(\mathbf{x}) = -\infty \Rightarrow f \text{ ha massimo su } \mathbb{R}^N$$

$$\left(\text{se } \lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \Rightarrow f \text{ ha minimo su } \mathbb{R}^N \right)$$

TORNANDO ALL'ESEMPIO POSSO DIRE CHE

$(\bar{x}, \bar{y}) = \pm (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (sono gli unici pti possibili)

$$\Rightarrow \max_{\mathbb{R}^2} f = 4 \quad \left(= f(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \right)$$

2) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} + 2xy$

DOMINIO $= \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

($\mathbb{R}^2$ meno l'origine)

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$

(Teoremi sui limiti: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0^+ \Rightarrow$ . . .)

- NON C'È $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)$

INFATTI $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

MENTRE xy NON HA LIMITE per $\|(x,y)\| \to \infty$

dato che (i) sulla retta $x = y$ tende a $+\infty$
(ii) sulla retta $x = -y$ tende a $-\infty$

(iii) sulle rette $x=0$ o $y=0$ tende a zero

- Troviamo i punti stazionari

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + 2x$$

I pti stazionari devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2} \\ x = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Longrightarrow \quad x = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} \, \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

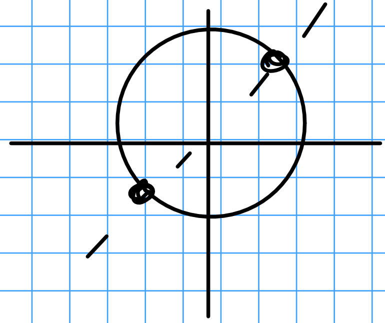
$$\Updownarrow$$

$x=0$ oppure

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^4} = 1 \iff x^2+y^2 = 1$$

- Se $x=0 \rightarrow y=0$ TROVO $(0,0)$ NON ACCETTABILE
- METTO $x^2+y^2=1$ nel sistema $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} y = x \\ x = y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff$$



$$x^2+x^2=1 \iff x^2=\frac{1}{2} \qquad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ 2 PUNTI STAZIONARI $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• CHE TIPO DI PUNTI SONO ??

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2(x^2+y^2)^2-2x\,2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= -\frac{2(x^2+y^2)-8x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{+6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^3}$$ (per simmetria ...)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}+2x\right) =$$

$$-2y\,\frac{-2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}+2=\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}+2$$

$$Hf\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{6}{2}-\frac{2}{2}, & \frac{8}{2}+2\\ \frac{8}{2}+2, & \frac{6}{2}-\frac{2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

INDEFINITA : $\det = 2\cdot2-6\cdot6=4-36<0$

$\pm\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ SONO DUE SELLE

• PER CURIOSITÀ TROVIAMO GLI AUTOVALORI / AUTOVETTORI

$$P(\lambda)=(2-\lambda)(2-\lambda)-36=\lambda^2-4\lambda-36+4=$$
$$\lambda^2-4\lambda-32$$

$$\lambda_{12}=2\pm\sqrt{4+32}=2\pm6=\begin{cases}8\\-4\end{cases}$$ DISCORDI

$(2-\lambda)^2=36 \iff 2-\lambda=\pm6$ λ

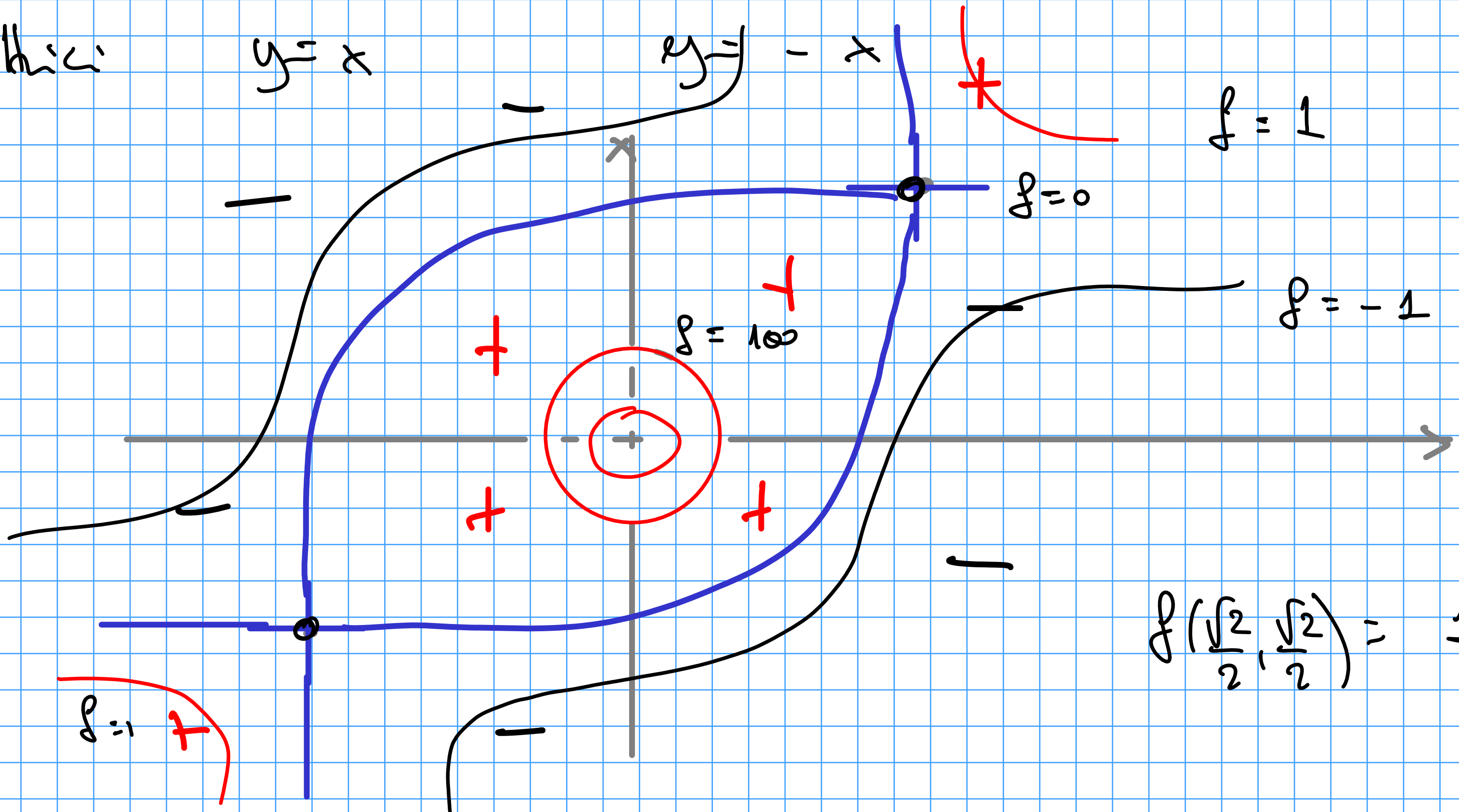
$\lambda_1=8$ $e_2=??$ $e_1=(x_1,y_1)$ con

$$\begin{cases} 2x_1 + 6y_1 = 8x_1 \\ \dots \end{cases} \iff 6y_1 = 6x_1$$

per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Per ortogonalità $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

LA "DIREZIONE DELLA SELLA" è data dalle bisettrici $y = x$ $y = -x$



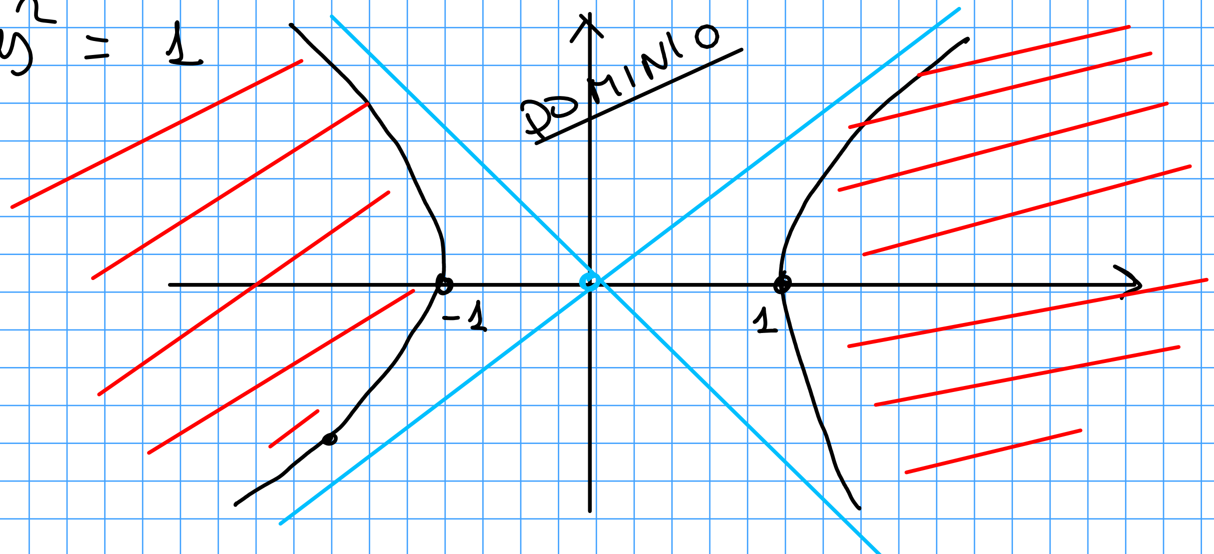
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

3) $f(x,y) = y^2 + \dfrac{16}{\sqrt{1+y^2-x^2}}$

• DOMINIO : $1+y^2-x^2 > 0$ $\left(\begin{array}{l} \geq 0 \text{ per dare senso alla radice} \\ \neq 0 \text{ se no viene } \frac{1}{0} \end{array}\right)$

LA ZONA $1+y^2-x^2=0$ è un'iperbole

$x^2-y^2=1$



$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x,y) = +\infty \quad \text{se} \quad (\tilde{x},\tilde{y}) \in \text{IPERBOLE}, \text{ cioè se } \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1$$

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ (x,y)\in \text{DOMINIO}}} f(x,y) = +\infty \quad (??)$$

$(y^2 \geq 1 + x^2)$

SI VEDE CHE se $\|(x,y)\| \to \infty$ e $y^2 \geq 1 + x^2 \Rightarrow$

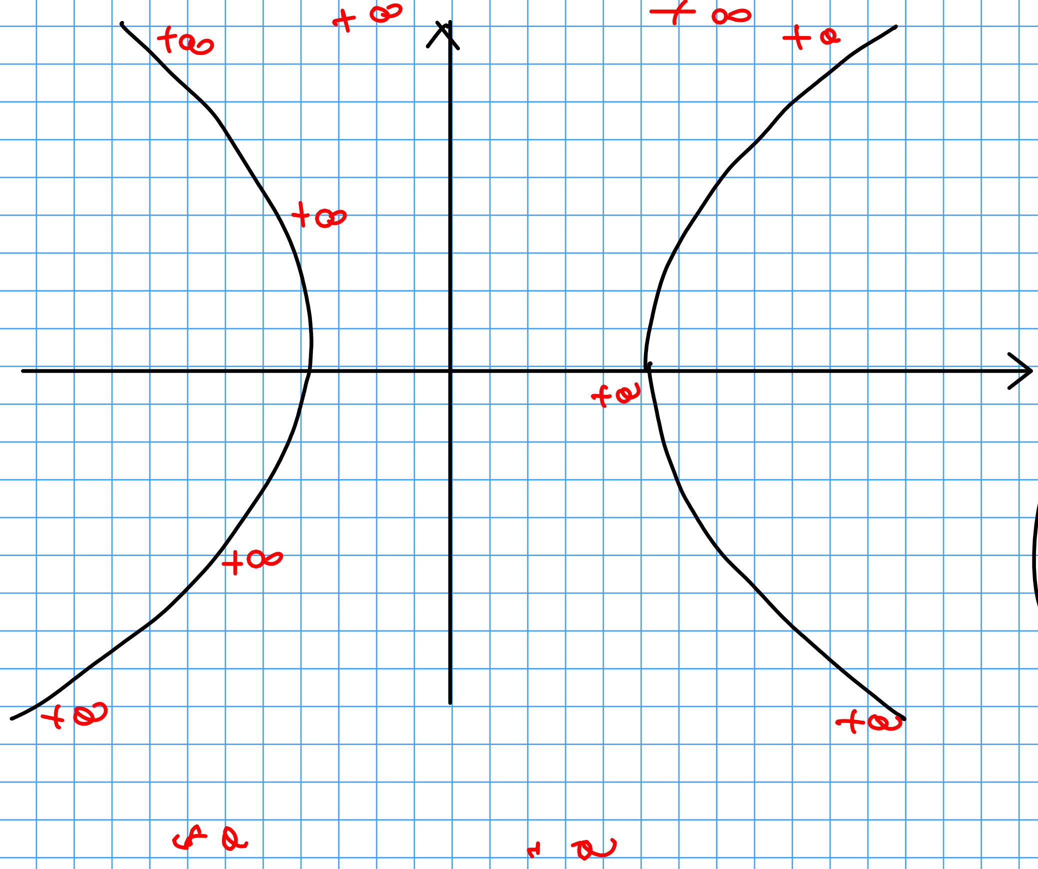
$$y^2 \to +\infty$$

<u>DIM.</u> Se $\|(x,y)\|$ DIVERGE $\Rightarrow$ x DIVERGE oppure y DIVERGE

- NEL SECONDO CASO HO FINITO
- NEL PRIMO CASO, dato che $y^2 \geq 1 + x^2 \Rightarrow$ anche y^2 DIVERGE

NE DEDUCO CHE

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ (x,y)\in \text{DOMINIO}}} f(x,y) \geq \lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ (x,y)\in \text{DOMINIO}}} y^2 = +\infty$$



$\leadsto$ $\boxed{f \text{ HA MINIMO}}$

(Dal comportamento descritto $\Rightarrow$ $\{f(x,y) \le c\}$ è LIMITATO E CHIUSO
- - - -)

• Cerchiamo i punti stazionari

$$f(x,y) = y^2 + \frac{16}{\sqrt{1+y^2-x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-16 \frac{-2x}{2\sqrt{1+y^2-x^2}}}{1+y^2-x^2} = \frac{16x}{(1+y^2-x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 16\,\frac{\dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2-x^2}}}{1+y^2-x^2} = 2y - \frac{16y}{(1+y^2-x^2)^{3/2}}$$

PTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff 2y - \frac{16y}{(1+y^2)^{3/2}} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ 1 = \dfrac{8}{(1+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow$$

(tutto >0)

$$1 = \frac{2}{(1+y^2)^{1/2}} \longleftrightarrow$$

$$1 = \frac{4}{1+y^2} \longleftrightarrow$$

$$1+y^2 = 4$$

$$y^2 = 3 \qquad y = \pm\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ TRE PUNTI

$(0,0)$ $\quad (0, \sqrt{3})$ $\quad (0, -\sqrt{3})$ $\quad$ (tutti nel dominio)

FACENDO I CALCOLI (PROVARE !!)

$\Rightarrow$ $(0,0)$ è punto di sella

$\pm(0,\sqrt{3})$ punti di minimo $\longrightarrow$ MINIMO ASSOLUTO
(per quanto detto prima)

DUNQUE

$$\min_{\text{DOMINIO}} f(x,y) = f(0,\sqrt{3}) = 3 + \frac{16}{\sqrt{1+3-0}} = 3+8 = 11$$

$(f(0,0) = 16)$