Analisi Matematica II
Lezione 16
2 novembre 2015

AVVISO

DOMANI MARTEDÌ 3 NON C'È LEZIONE

DEF $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in A$, dico che x_0 è punto di massimo (minimo) se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$$

$$(f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A)$$

Dico che x_0 è pto di massimo (minimo) relativo se esiste $R>0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$ $\|x-x_0\|<R$

$$(f(x) \geq f(x_0))$$

NOTA x_0 è PUNTO di max/min (relativo) per f
mentre $f(x_0)$ è il VALORE max/min (rel.) per f.

$$\max_A f \leftarrow \text{VALORE } \big(f(x)\big)$$

TEOR. (Fermat) Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$

- x_0 punto interno ad A ($x_0 \notin \partial A$)
- x_0 punto di massimo o minimo relativo
- f sia differenziabile in x_0

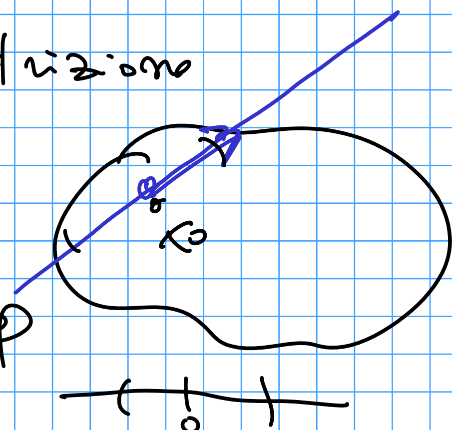
ALLORA $\nabla f(x_0) = \vec{0}$, cioè

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

Dim. (Ci si riconduce al caso unidimensionale).

Fisso una direzione $\vec{v}$, considero la restrizione

$$\varphi(t) := f(x_0 + t\vec{v})$$



- $t = 0$ è punto di max/min rel per φ

- $t=0$ è interno al dominio di φ $\left(=\{t : x_0+t\vec{v} \in A\}\right)$
- φ è derivabile in $t=0$ e si ha

$$\varphi'(0) = \nabla f(x_0)\cdot\vec{v}$$

Usando Fermat unidimensionale ricavo $\varphi'(0)=0$ e cioè

$$\nabla f(x_0)\cdot\vec{v} = 0$$

In questo discorso $\vec{v}$ è un vettore arbitrario DUNQUE

$$\nabla f(x_0)\cdot\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x_0) = \vec{0}$$

DUNQUE VALE LA TESI

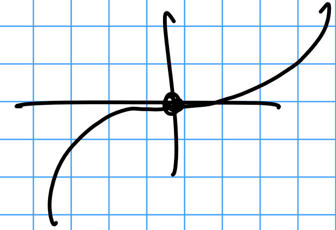
<u>DEF:</u> Chiamo punto stazionario o punto critico un punto x_0 tale che $\nabla f(x_0) = \vec{0}$.

Fermat dice: (se x_0 è interno ad A e se f è diff. in x_0)

x_0 è pto di max/min rel. $\Rightarrow$ x_0 è stazionario

SI VEDE GIÀ IN UNA VARIABILE CHE "$\Leftarrow$" IN GENERALE

NON VALE. $f(x) = x^3$



$x_0 = 0$ è stazionario, ma non è

né pto di max né pto di min.

IN $N=2$ si potrebbe prendere $f(x,y) = x^3 + y^3$ ..

OSS.

- CI SI CHIEDE CHE CONDIZIONI POSSO AGGIUNGERE PER AVERE CHE UN PTO STAZ. x_0 sia di max/min (relativo)

- COME SUCCEDE IN UNA VARIABILE PER AVERE FERMAT BISOGNA CHE x_0 sia INTERNO!

IN GENERALE PUÒ SUCCEDERE CHE f abbia max su A (per esempio se A limitato e chiuso) MA non so se tale max sia assunto in un punto interno

QUINDI SE CERCO IL MAX (o il MIN) devo considerare:

- tutti i punti stazionari interni ad A
- tutti i punti di frontiera di A (PROBLEMA → VEDREMO..)

- tutti i punti in cui f non è differenziabile

- OLTRE A QUESTO POSSO INTERESSARMI STABILIRE LA NATURA DI TUTTI i punti stazionari $\Leftarrow$ LO VEDIAMO ORA
USIAMO LE DERIVATE II^e

<u>TEOREMA</u> $f : A \to \mathbb{R}$. A aperto, f di classe $C^2(A)$
(f HA DERIVATE SECONDE CONTINUE IN A)
$x_0 \in A$ $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 è stazionario per f)

<u>ALLORA</u>

MATRICE HESSIANA DI f in x_0

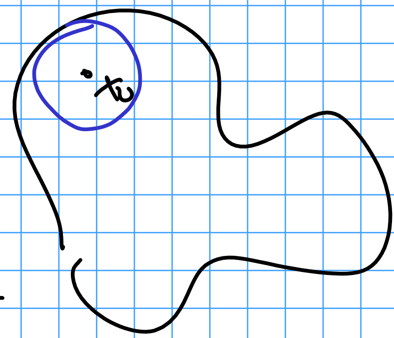
(a) Se $Hf(x_0)$ è definito positivo (negativo) $\Rightarrow$
x_0 è punto di minimo relativo (massimo relativo)

(b) Se $Hf(x)$ è semidefinito positivo (negativo)
per tutte le x di un intorno di x_0 $\Rightarrow$
x_0 è punto di minimo relativo (massimo relativo)

(c) Se $H_f(x_0)$ è indefinito (cioè $H_f(x_0)$ ha un autovalore >0 e un altro valore <0) $\Rightarrow f$ NON HA NÉ MAX NÉ MIN IN x_0. In questo caso dico che x_0 è "PUNTO DI SELLA"

DIM. USO TAYLOR (CON RESTO DI LAGRANGE).

PRENDO $R>0$ tale che $B(x_0,R)\subset A$
(lo posso prendere perché A è aperto)



Dato che $B(x_0,R)$ è convesso posso fare Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \overset{=0}{\cancel{\nabla f(x_0)}}\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(\xi)(x-x_0)^2$$

per tutte le $x\in B(x_0,R)$, dove ξ è un pto opportuno sul segmento $[x_0,x]$

$$f(x)-f(x_0) = \left(\frac{1}{2} H_f(\xi)(x-x_0)\right)\cdot(x-x_0)$$

SO che $H_f(x_0)$ è def. >0, cioè $\lambda_i(x_0)$ (autovalori di $H_f(x_0)$), sono tutti >0. Do per buono che questi $\lambda_i(x)$ dipendono con continuità da x – PER LA PERMANENZA DEL

SEGNO posso dire che $\lambda_i(x) > 0$ $(i = 1 \dots N)$ purché $\|x - x_0\| < \rho$ con ρ abbastanza piccolo. DUNQUE

$H_f(x)$ è definita > 0 quando x è sufficientemente vicino a x_0: $x \in U = \{\|x - x_0\| < \rho\}$. Per tali x, anche ξ dista da x_0 al più ρ e dunque $H_f(\xi) > 0$.

NE SEGUE

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{2} H_f(\xi)(x - x_0) \cdot x - x_0}_{> 0} \quad \text{per } x \in U, \ x \neq x_0$$

da cui f HA MINIMO (stretto) in $x = x_0$, relativamente alle $x \in B(x_0, \rho)$

- STESSO DISCORSO PER IL MAX (quando $H_f(x_0) < 0$)
- SE $H_f(x) \geq 0$ per le x di un intorno $B(x_0, \rho)$, ragiono come sopra dicendo che:

$$x \in B(x_0, \rho) \Rightarrow \xi \in B(x_0, \rho) \Rightarrow H_f(\xi) \geq 0 \Rightarrow$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in B(x_0, \rho)$$

(di nuovo x_0 è pto di minimo)

INFINE, se $H_f(x_0)$ ha un autovalore $\lambda > 0$ e un autovalore $\mu < 0$ prendiamo

$\vec{v}$ autovettore relativo a $\lambda > 0$

$\vec{w}$ autovettore relativo a $\mu < 0$

e facciamo

$$\varphi(t) := f(x_0 + t\vec{v})$$

$$\psi(t) := f(x_0 + t\vec{w})$$

Facendo i conti:

$$\varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = 0, \quad \varphi''(0) = \underbrace{H_f(x_0)\vec{v}}_{= \lambda \vec{v}} \cdot \vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ nella direzione di $\vec{v}$ f ha un minimo relativo

$$\psi(0) = f(x_0), \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = H_f(0)\vec{w} \cdot \vec{w} = \mu \|\vec{w}\|^2 < 0$$

$\Rightarrow$ nella direzione di $\vec{w}$ f ha un max rel.

DUNQUE x_0 è di sella

ESEMPI (in due variabili)

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$$

$(A = \mathbb{R}^2)$ f è C^2 ($C^\infty \leftarrow$ si può derivare a volontà)

- VEDIAMO SE CI SONO PUNTI STAZIONARI.

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y} f$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -3y^2 + x$$

Se le pongo tutte due uguali a zero:

$$\begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow y = -3(3y^2)^2 = -27y^4 \quad \begin{matrix} \nearrow y = 0 \\ \searrow 1 = -27y^3 \end{matrix}$$

SE $y = 0$ anche $x = 0$ $\Rightarrow$ trovo $(0,0)$

SE $27y^3 = -1$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{3}$; dato che $x = 3y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ TROVO $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

DUE PTI STAZIONARI : $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

- CHE PUNTI SONO ?? Facciamo le derivate II^e.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante $= -1 < 0$
$\Rightarrow$ INDEFINITA
$\Rightarrow (0,0)$ pto di sella

Determinante $4 - 1 = 3 > 0$
$a_{11} = 2 > 0$ H_f DEF. POSITIVA
$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ PTO DI MINIMO REL.

DOMANDA Sarà che $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è di minimo assoluto?

NO se considero $f(0,y) = -y^3$ che tende a $-\infty$

per $y \to +\infty$ e quindi f NON È INFERIORMENTE LIMITATA

- A MAGGIOR RAGIONE f non ha max

(non c'è nessun pto staz. che sia di max rel.)

- TORNIAMO A $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

cerchiamo esplicitamente autovalori / autovettori.

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

Chi è un autovettore relativo a $\lambda = 1$??

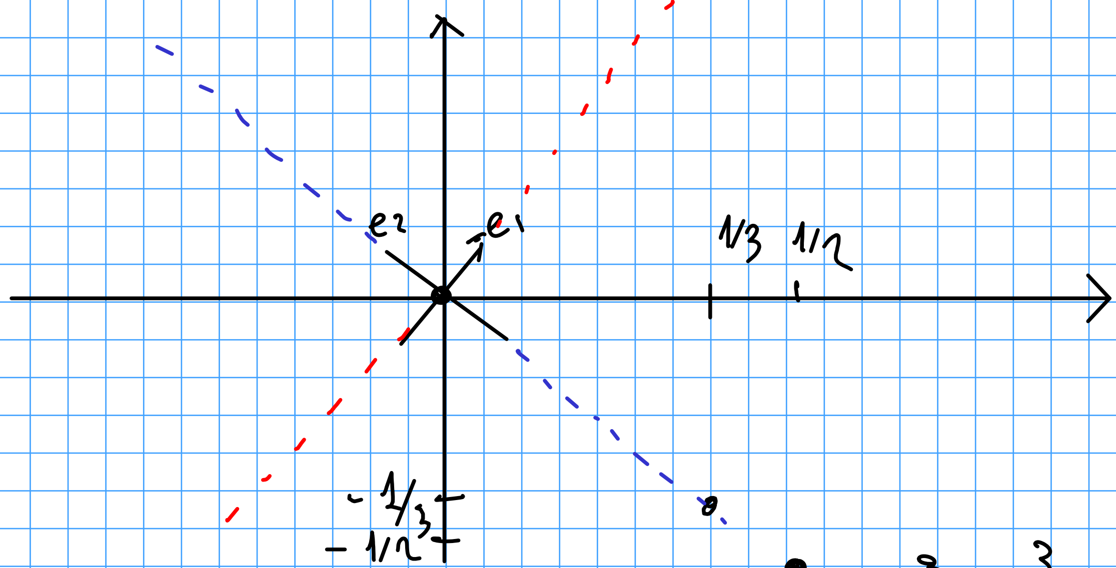
$$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y = x \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y = y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases}$$

QUINDI $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1$

.... $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -1$

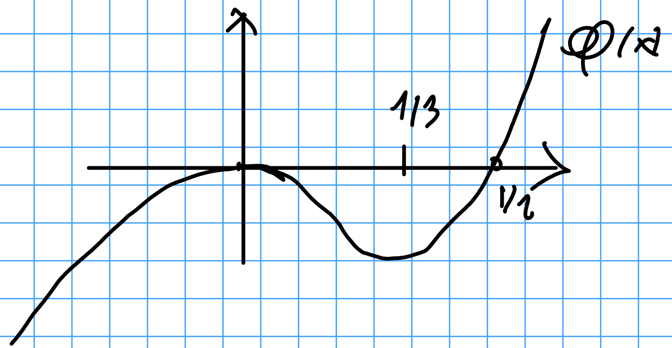
Nella direzione di e_1 (rimanendo vicino all'origine) f ha un minimo

Nella direzione di e_2 (~ 0) f ha un max



Vediamo il grafico di $\varphi(x) = f(x, -x) = x^3 + x^3 - x^2 = 2x^3 - x^2 = x^2(2x-1)$

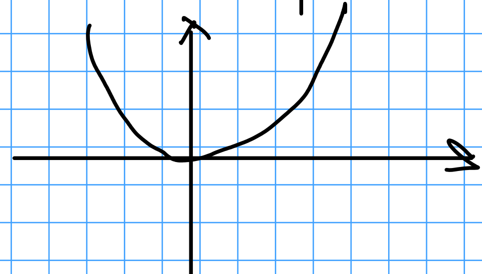
$\varphi'(x) = 6x^2 - 2x$; $\varphi'(x) = 0$ se $x = 0$ o $x = \frac{1}{3}$



(RESTRIZIONE DI f sulla retta blu)

Se invece prendo la restrizione $\psi(x) = f(x, x) = x^2$.

Vedo il seguente grafico



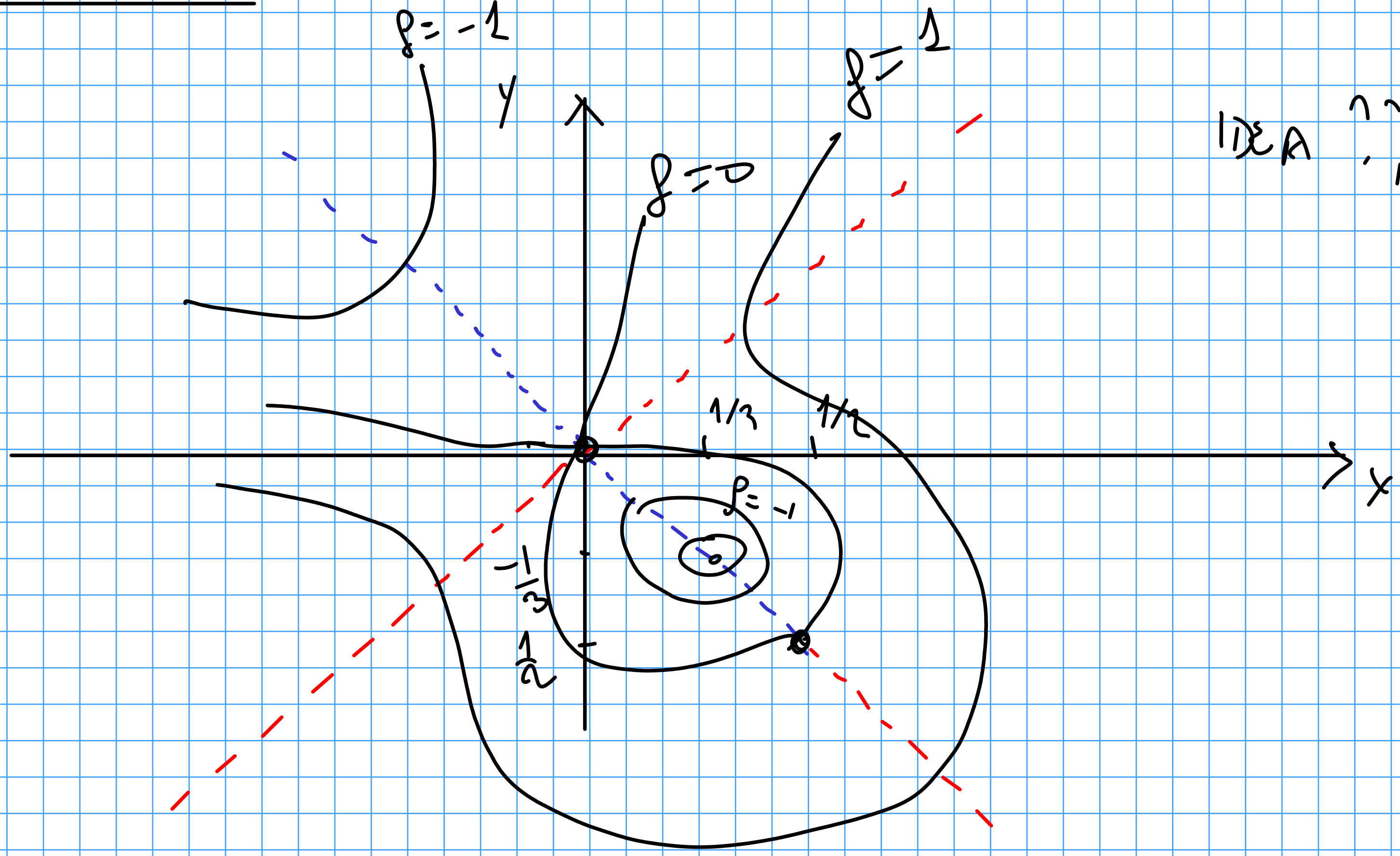
(RESTRIZIONE DI f sulla diagonale a 45°)

DOMANDA Tracciare l'insieme $\{f(x,y)=0\}$??

cioè il luogo dei punti (x,y): $x^3-y^3+xy=0$

DIFFICILE (Cosiddetto perché)

IDEA ??



ALTRO ESEMPIO $f(x,y) = 4x^4 - 16x^2y + x$

(DOMINIO = $\mathbb{R}^2$, f è C^2)

· PTI STAZIONARI.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 16x^3 - 32xy + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -16x^2$$

$$\begin{cases} 16x^3 - 32xy + 1 = 0 \\ -16x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

NO PTI STAZ.

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$$

PTI STAZ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4y^3$$

$$\begin{cases} 4x - 4x^3 = 0 \\ 4y - 4y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \;/\; x = \pm 1 \\ y = 0 \;/\; y = \pm 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} (0,0), (0,1) \\ (0,-1), (1,0) \\ (-1,0), (\pm 1, \pm 1) \end{matrix}$$

(IN TUTTO 9 punti)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ PTO DI MINIMO

$$Hf(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$ SELLE (det < 0)

$$Hf(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ SELLE (det < 0)

$$Hf(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$ MASSIMI (det > 0, -8 < 0)