Analisi Matematica II
Lezione 15
28 ottobre 2015

TEOREMA (SCHWARZ)

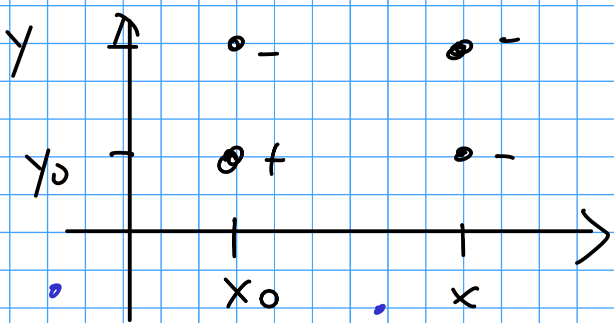
Se $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono in un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ e

se sono continue in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

Dim. Lo faccio in $N=2$. Prendo (x_0, y_0) e (x, y)

e pongo



$$\Delta(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)$$

Se chiamo inoltre $\varphi_x(y) = \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y)}$

VISTA COME FUNZIONE DI y
x è un parametro

posso scrivere

Lagrange in y

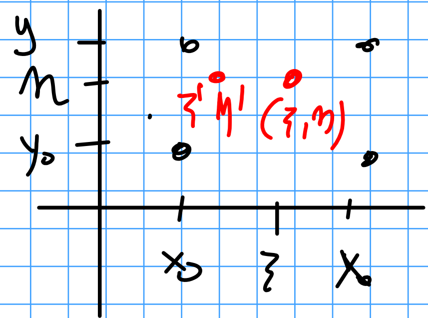
$$\Delta(x,y) = \varphi_x(y) - \varphi_x(y_0) = \varphi_x'(\eta)(y-y_0)$$

dove η è compreso tra y e y_0.

Calcolo $\varphi_x'(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y)$ DUNQUE

$$\Delta(x,y) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,\eta) - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,\eta)\right)}_{\text{APPLICO LAGRANGE IN } x}(y-y_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,\eta)\right)\Bigg|_{x=\xi}(x-x_0)(y-y_0) =$$



con ξ compreso tra x e x_0, cioè

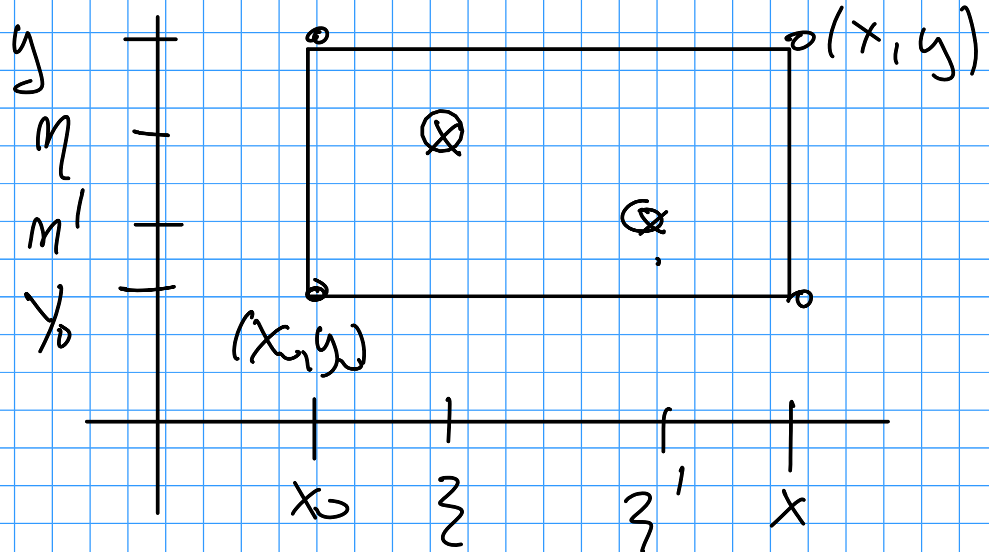
(1) $$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)$$

RIFACCIO TUTTO SCAMBIANDO x e y .... TROVO

(2) $$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi', \eta')(x-x_0)(y-y_0)$$

dove di nuovo ξ' è compreso tra x_0 e x

η' è compreso tra y_0 e y



DA (1) e (2) RICAVO:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\xi,\eta)\cancel{(x-x_0)}\cancel{(y-y_0)} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\xi',\eta')\cancel{(x-x_0)}\cancel{(y-y_0)}$$

Se faccio tendere (x,y) a (x_0,y_0) entrambi i punti

(ξ, η) e (ξ', η') TENDONO A (x_0, y_0), DATO che le supposte continue $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\xi, \eta) \to \qquad e \ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\xi', \eta') \to$$

e quindi, passando al limite,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

FORMULA DI TAYLOR.

Ricordiamo il caso $N=1$ $\qquad f:]a,b[\to \mathbb{R}$

$x_0 \in]a,b[$

- Se f ha n derivate $\Rightarrow$

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}^{\text{polinomio di Taylor}} + R_n(x)$$

DOVE $R_n(x) = o(x-x_0)^n$, cioè $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

(resto di Peano)

OPPURE - se f ha $n+1$ derivate

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(resto di Lagrange)

VOGLIO PASSARE A N variabili. $f : A \to \mathbb{R}$
dove A è un aperto di $\mathbb{R}^N$
Facciamo solo i casi $n=1$, $n=2$

CONVIENE FARE PRIMA il resto di Lagrange.

MI SERVE <u>A CONVESSO</u>

<u>Teorema</u> (Taylor con resto di Lagrange, caso $n=0$, $n=1$)

$f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ convesso, f C^2 (HA DER. II^e continue)
A aperto

Dati x e x_0 in A si ha:

(a) esiste ξ sul segmento tra x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(\xi)\cdot(x-x_0)$$

(è l'equivalente del Teorema della media di Lagrange in $N=1$)
Taylor di ordine $n=0$ con resto di Lagrange)

(b) esiste ξ' sul segmento tra x_0 e x tale che

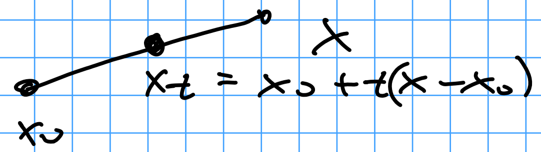
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(H_f(\xi')\,(x-x_0)\right)\cdot(x-x_0)}_{\text{FORMA QUADRATICA INDOTTA DA } H_f}$$

(Taylor secondo Lagrange con $n=1$)

DIM. Dati x e x_0 considero la funzione di una variabile ottenuta restringendo f sul segmento di estremi x_0 e x; cioè

$$\varphi(t) = f(\underbrace{x_0 + t(x-x_0)}_{\gamma(t)}) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma'(t) = (x-x_0)$$



Per i teoremi di "calcolo"

φ è derivabile due volte e si ha:

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

$$\varphi''(t) = \left(H_f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\right) \cdot (x - x_0)$$

(a) Applico Lagrange a $\varphi(t)$ tra $t=0$ e $t=1$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(\tau)(1 - 0) \qquad 0 < \tau < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(\underbrace{x_0 + \tau(x - x_0)}_{\xi}) \cdot (x - x_0)$$

(b) Stesso discorso: (Taylor di ordine 1 tra $t=0$ e $t=1$)

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)(1 - 0) + \frac{1}{2}\varphi''(\tau')(1 - 0)^2; \quad 0 < \tau' < 1$$

SOSTITUENDO TROVO:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\circ(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(\underbrace{x_0+\tau'(x-x_0)}_{\xi'})(x-x_0)\circ(x-x_0)$$

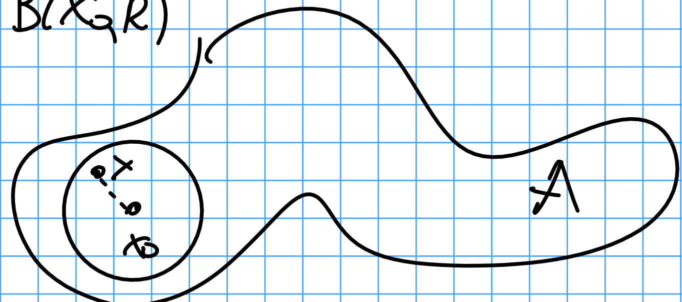
CONSEGUENZA: TAYLOR CON RESTO DI PEANO $(m=1,\ n=2)$

TEOREMA $f: A \to \mathbb{R}$ A aperto di $\mathbb{R}^N$ (NON SERVE CONVESSO) f è C^2, ALLORA Dato $x_0 \in A$ si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x-x_0)^2 + R(x)$$

dove $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$

DIM. Dato $x_0 \in A$ prendo un raggio $R>0$ tale che $B(x_0,R) \subset A$. Prendo $x \in B(x_0,R)$



Applico la formula precedente

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(\xi)(x-x_0)^2 \quad \text{per } \xi \text{ opportuno}$$

sul segmento da x_0 e x $\Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x-x_0)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(H_f(\xi) - H_f(x_0)\right)(x-x_0)^3}_{R(x)}$$

si vede che $\frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2} \to 0$ quando $x \to x_0$; infatti

$$\left| \frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2} \right| \le \frac{1}{2} \frac{\| H_f(\xi) - H_f(x_0)\| \, \|x-x_0\| \, \|x-x_0\|}{\|x-x_0\|} =$$

[sto usando: $|(L\vec{v})\cdot\vec{v}| \le \|L\vec{v}\| \, \|\vec{v}\|$ [Schwartz]

$\le \|L\| \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{v}\|$

norma della matrice L]

$$\frac{1}{2} \| H_f(\xi) - H_f(x_0)\| \longrightarrow 0 \text{ se } x \to x_0$$

perché anche $\xi \to x_0$

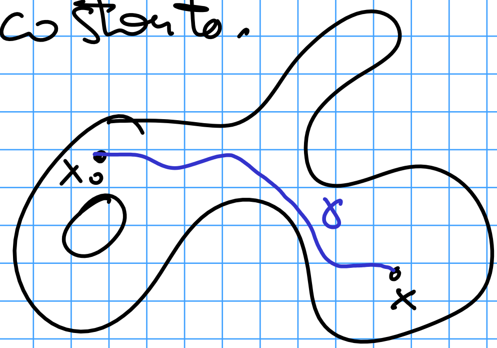
Perché ogni componente dell'Hessiano in ξ tende alla corrispondente componente di $H_f(x_0)$

TEOREMA

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad$ f C^1 (derivabile con tutte le derivate continue) $\quad$ A aperto connesso.

Se $\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f$ è costante.

Dim. Siano x_0 e x due punti di A.



Per definizione di "connesso" esiste una curva $\gamma: [a,b] \to A$ che congiunge x_0 e x

$$(\gamma(t) \in A \quad \forall t \in [a,b], \gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x)$$

Si può dimostrare che se esiste una tale γ la posso trovare regolare — SUPPONGO ALLORA che la γ sia regolare

Poniamo $\varphi(t) = f(\gamma(t))$

Se derivo in $t \Rightarrow \varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t) = 0$

Per il risultato di Analisi 1 $\Rightarrow \varphi(t)$ è costante; in particolare $\varphi(1) = \varphi(0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0)$.

Dato che x_0 e x sono arbitrari $\Rightarrow f$ è costante