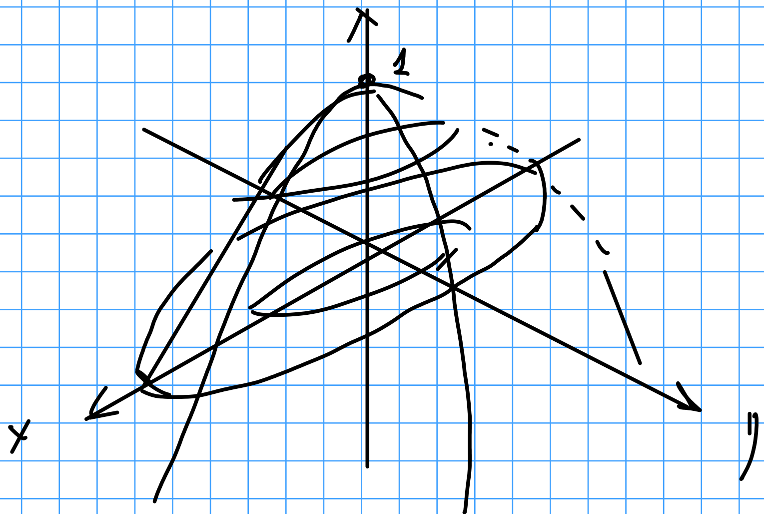
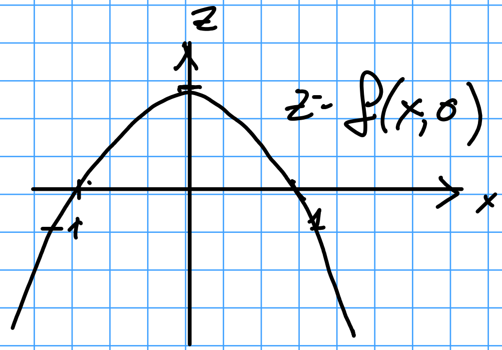
Analisi Matematica II
Lezione 14
27 ottobre 2015

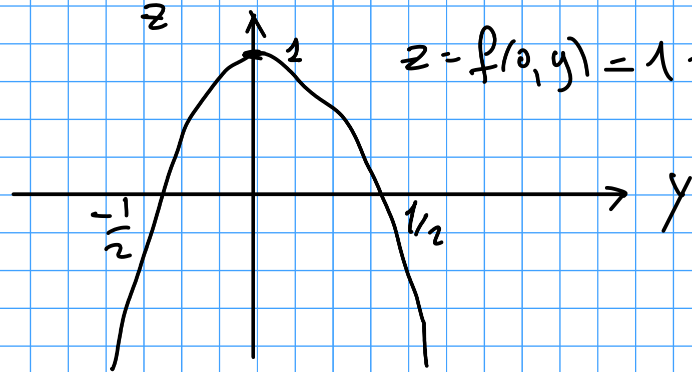
ESEMPI

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 4y^2$$





$z = f(x,0) = 1 - x^2$

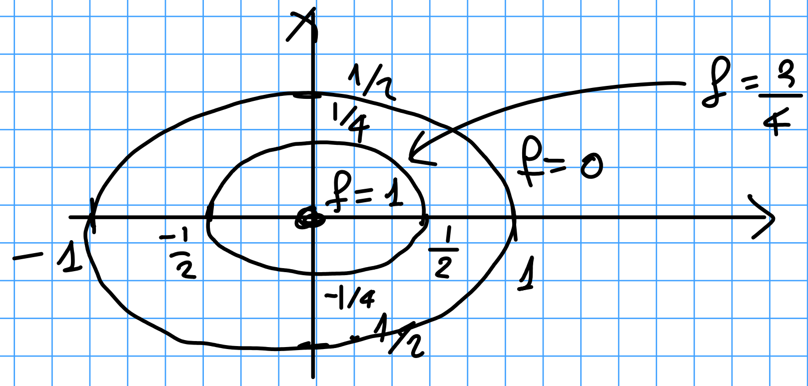


$z = f(0,y) = 1 - 4y^2$

INSIEME DI LIVELLO

$$\{(x,y) : f(x,y) = c\} \iff \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 1 - c\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } c > 1 \\ \{(0,0)\} & c = 1 \\ \text{ELLISSE} & \end{cases}$$

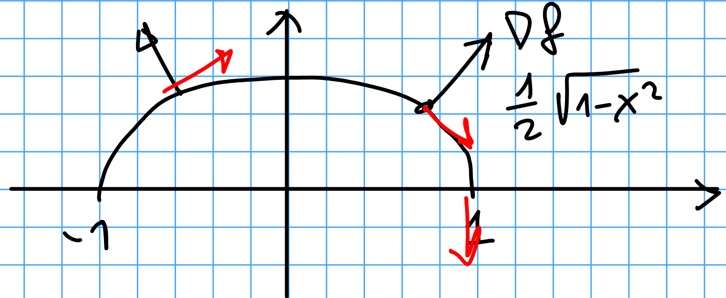
Se $c = 0$ viene l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$

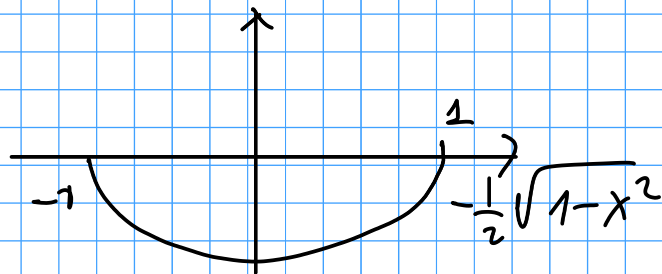


Se $c = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ viene l'ellisse $x^2 + 4y^2 = \frac{1}{4}$

Prendo $c = 0$ $\Rightarrow$ $\{f = 0\} = \{x^2 + 4y^2 = 1\}$

Lo posso per esempio descrivere con due curve cartesiane, grafico delle funzioni $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$





cioè

$$\gamma_1(t) = t\,\vec{i} + \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$$

$$-1 \le t \le 1$$

$$\gamma_2(t) = t\,\vec{i} - \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$$

γ_1 e γ_2 sono curve regolari "nell'intervallo aperto"

se $t \neq 1, -1$ $\quad \gamma_1'(t) = \underbrace{\vec{i} - \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j}}$

VICEVERSA $\quad \nabla f(x,y) = -2x\,\vec{i} - 8y\,\vec{j}$ $\quad$ (NOTA CHE $\nabla f(x,y) \neq \vec{0}$)

VERIFICHIAMO CHE $\quad \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

IN EFFETTI

$$\nabla f(\gamma_1(t)) = \nabla f\left(t, \frac{\sqrt{1-t^2}}{2}\right) =$$

$$-\left(2t\,\vec{i} + \frac{8}{2}\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}\right) = -\left(2t\,\vec{i} + 4\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}\right)$$

FACCIO IL PRODOTTO SCALARE CON $\gamma'(t)$:

$$-\left(2t\,\vec{i} + 4\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}\right)\circ\left(\vec{i} - \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j}\right) =$$

$$-\left(2t - 4\sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\left(2t - 2t\right) = 0$$ TORNA

PER CURIOSITÀ VERIFICHIAMO CHE

$$\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|}$$ HA limite quando $t \to 1 \,/\, -1$

AND γ_1 HA UNA RIPARAMETRIZZATA REGOLARE

IN EFFETTI

$$\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{t^2}{1-t^2}}}\,\vec{i} + \frac{-\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{t^2}{1-t^2}}}\,\vec{j}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{4(1-t^2) + t^2}}\,\vec{i} + \frac{-t}{\sqrt{4(1-t^2) + t^2}}\,\vec{j}$$

$$\xrightarrow{(t \to 1)} -\vec{j}$$

TUTTO SI PUÒ FARE (PIÙ SEMPLICEMENTE)

DESCRIVENDO L'INSIEME $\{x^2 + 4y^2 = 1\}$

MEDIANTE

$$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \frac{1}{2}\sin(t)\,\vec{j}$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \frac{1}{2}\cos(t)\,\vec{j}$$

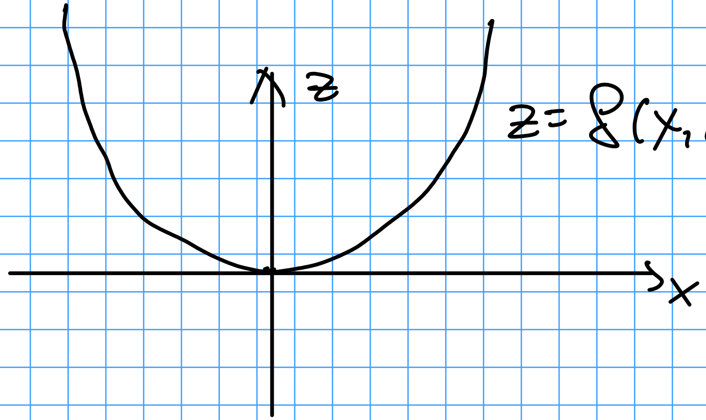
$$\nabla f(\gamma(t)) = -2x\,\vec{i} - 8y\,\vec{j}\,\Big|_{\substack{x=\cos(t)\\ y=\frac{1}{2}\sin(t)}} =$$

$$-\left(2\cos(t)\,\vec{i} + 4\sin(t)\,\vec{j}\right)$$

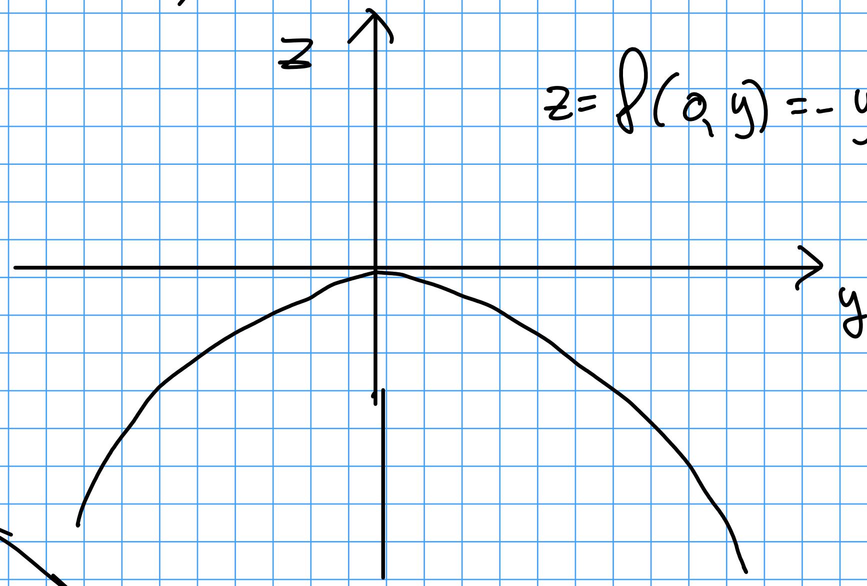
che è perpendicolare a $\gamma'(t)$

ALTRO ESEMPIO $f(x,y) = x^2 - y^2$

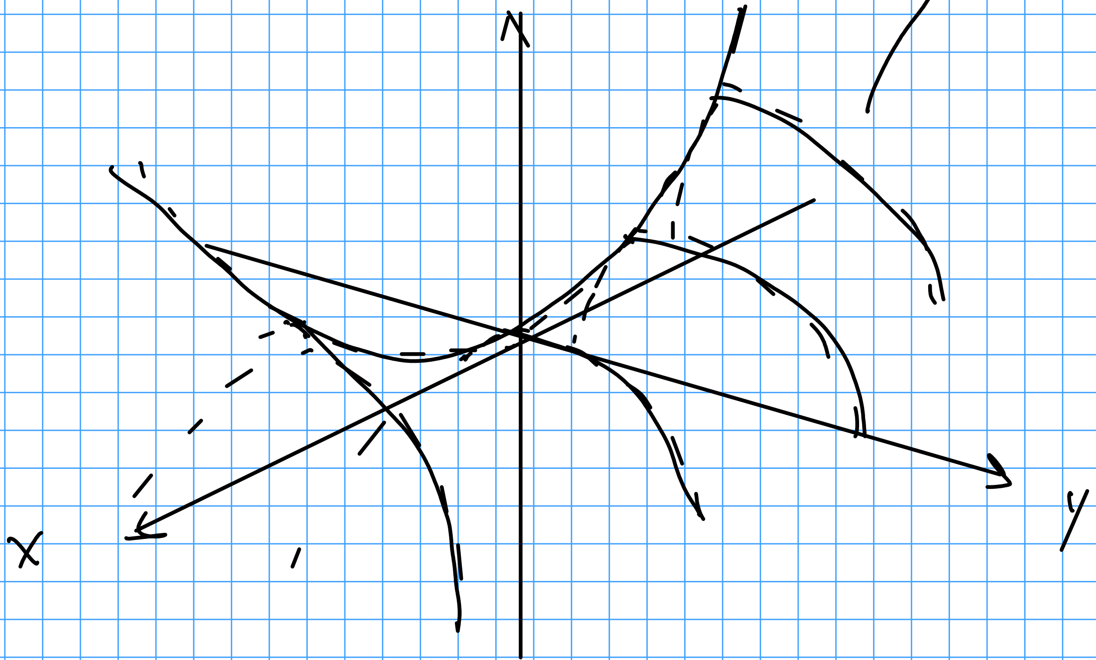
(grafico di f è "una sella")



$z = f(x,0) = x^2$



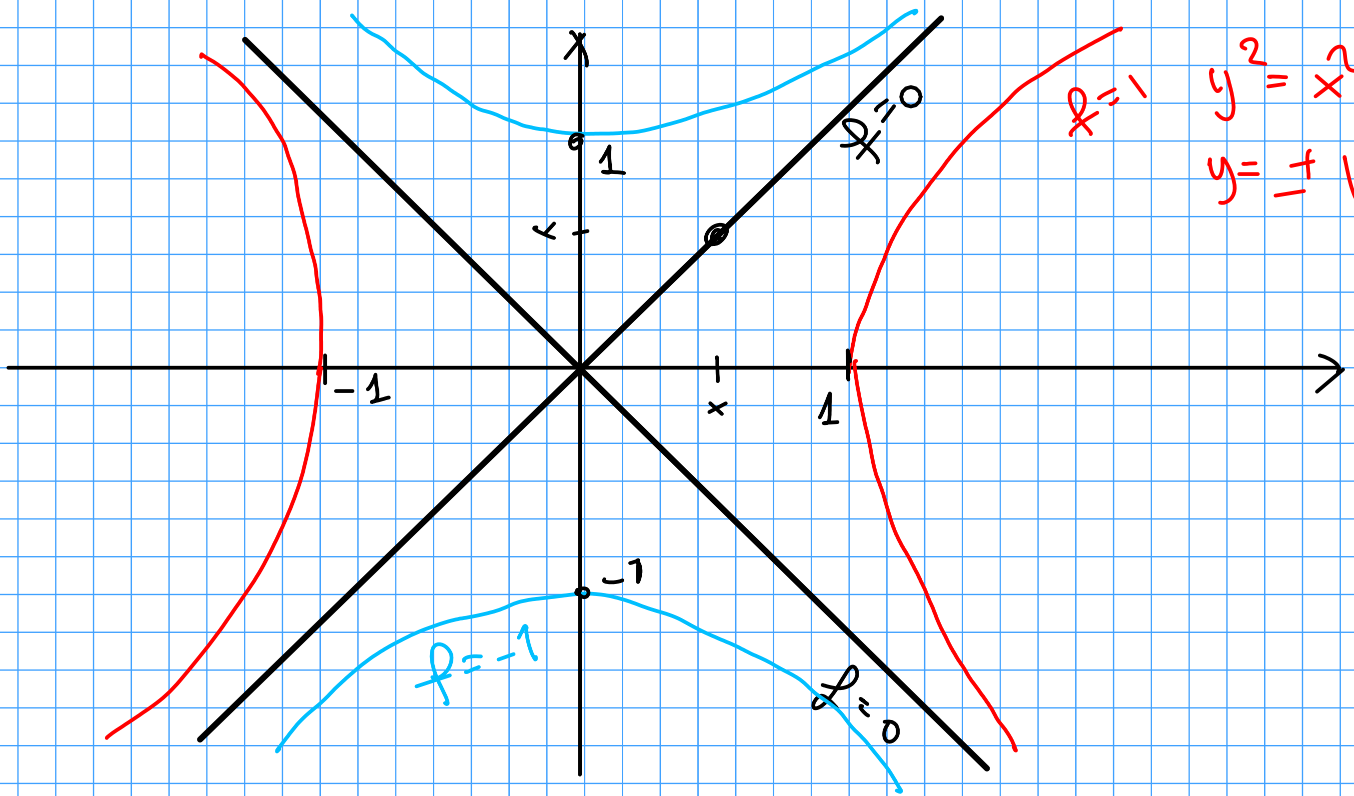
$z = f(0,y) = -y^2$



SE FACCIO LE LINEE DI LIVELLO TROVO DELLE IPERBOLI $(c \neq 0)$

$$x^2 - y^2 = c$$

SE $c=0$ TROVO DUE RETTE



$y^2 = x^2 - 1$

$y = \pm\sqrt{x^2-1}$ per $|x| \geq 1$

Prendiamo $c=0$ $\Rightarrow$ le due rette hanno come direzione tangente $\vec{i}+\vec{j}$ o $\vec{i}-\vec{j}$

$$\nabla f(x,y) = 2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$$

Se mi metto sulla diagonale principale $(y=x)$ $\Rightarrow$

$\nabla f(x,y) = 2x(\vec{i}-\vec{j})$ mentre la tangente è $\vec{i}+\vec{j}$

CHE SONO PERPENDICOLARI.

Prendiamo per esempio $c = 1 \Rightarrow$

$x^2 - y^2 = 1$ è descritta dalle due curve

$\gamma_1(t)$ $\cosh(t)\,\vec{i} + \sinh(t)\,\vec{j}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\gamma_2(t) = -\cosh(t)\,\vec{i} + \sinh(t)\,\vec{j}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_1'(t) = \sinh(t)\,\vec{i} + \cosh(t)\,\vec{j}$$

$$\nabla f(\gamma_1(t)) = \nabla f(\cosh(t), \sinh(t)) =$$

$$2\cosh(t)\,\vec{i} - 2\sinh(t)\,\vec{j}$$

PERPENDICOLARI

LE DERIVATE SECONDE !!

INTRODUCO $f''(x)(v_1, v_2)$

(DERIVATA DIREZIONALE II° RISPETTO A v_1 e v_2)

$$f''(x)(v_1, v_2) = \left(\frac{d}{dv_1} \frac{d}{dv_2} f(x, y) \right) \Big|_{x = x_0,\, y = y_0}$$

IN PARTICOLARE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$$