Analisi Matematica II
Lezione 15
26 ottobre 2015

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \quad \text{per } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

• È CONTINUA NELL'ORIGINE? cioè vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Se passo in coordinate polari trovo $(x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta)$

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)}{\rho^2} = \rho\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$$

$\Rightarrow \quad |f(\rho,\theta)| \leq \rho \, 1 \cdot 1 \cdot (1+1) = 2\rho$

Dato $2\rho \to 0$ se $\rho \to 0$ deduco che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

- f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$??

Proviamo a calcolare le derivate direzionali

FISSATO $\vec{v}$ devo calcolare $\frac{d}{dt} f(t\vec{v})\Big|_{t=0}$ $(=: f'(0)(\vec{v}))$

Dato che $f(0)=0$, è lo stesso fare

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t}$$

Se prendo $\vec{v}$ di modulo 1 posso scrivere

$$\underline{\vec{v} = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}} \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi[$$

e allora (per i calcoli fatti sopra) (t al posto di ρ)

$$\frac{f(t\vec{v})}{t} = \frac{t}{t} \cos\theta \sin\theta (\cos\theta + \sin\theta)$$

$\Rightarrow \quad f'(0)(\vec{v}) = \cos\theta \sin\theta (\cos\theta + \sin\theta)$

Tale derivata è nulla se $\theta = 0$ $(\vec{v} = \vec{e})$ e

ed è nulla se $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(\vec{v} = \vec{j})$

Se f fosse differenziabile $\Rightarrow f'(0)\vec{v} = 0 \;\; \forall \vec{v}$

MA QUESTO NON È VERO (ci sono MOLTI θ con $f'(0)(\theta) \neq 0$

per esempio $\theta = \frac{\pi}{4}$)

f NON È DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

ESEMPIO

$$f(x,y) := \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) := 0$$

(NOTA f è quella di prima moltiplicata per $x-y$,

dunque f è continua in $(0,0)$

SI PUÒ ANCHE RIFARE IL CALCOLO . Passo in coord.

Polari

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho^4 \cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^2}$$

$\Rightarrow \quad |\tilde{f}(\rho,\theta)| \le 2\rho^2 \quad \Rightarrow f$ tende a 0 per $\rho \to 0$

- VEDIAMO SE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

Provo a fare le derivate direzionali:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v}) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 v_1 v_2 (v_1^2 - v_2^2)}{t^2(v_1^2+v_2^2)} = 0$$

NON MI DÀ NIENTE

$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} \neq 0$

solo: se $df(0)$ esiste $\Rightarrow$
$df(0) = 0$
(0 come applicazione L tale che $L\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v}$)

Per vedere se f è differenziabile in $(0,0)$ provo applico la definizione corrente di dim. che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \overbrace{\nabla f(0,0)}^{0}\,[(x,y)-(0,0)]}{\|(x,y)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

IN COOR. POLARI TROVO

$$\left| \frac{\rho^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}} \cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right|$$

$$\leq \rho \cdot 2 \to 0$$

<u>DUNQUE</u> f è differenziabile e il diff. $df(0,0)$ è zero (la funzione nulla)

- SI PUÒ ANCHE UTILIZZARE IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE. PER QUESTO DEVO CALCOLARE

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} =$$

$$\frac{(3x^2 y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{y\,\frac{(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -x\,\frac{(y^4 + 4y^2x^2 - x^4)}{x^2+y^2} = \boxed{\frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{x^2+y^2}}$$

e dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

PASSANDO IN COORD POLARI:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\rho^5}{\rho^4}\left(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta\right)\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\rho^5}{\rho^4}\left(\cos^4\theta - 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta\right)\cos\theta$$

ENTRAMBE HANNO UN ρ IN PIÙ AL NUMERATORE $\Rightarrow$ TENDONO A ZERO se $\rho \to 0$ $\Rightarrow$ VALE IL DIFF. TOT.

TEOREMI DI CALCOLO DELLE DERIVATE

(1) LINEARITÀ (derivata della somma e del prodotto per uno scalare)

$f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f + \mu g)_j = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} f_j + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} g_j$$

COMPONENTE j-ESIMA

IN TERMINI "VETTORIALI"

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df + \mu\, dg$$

o $$J_{\lambda f + \mu g} = \lambda J_f + \mu J_g$$

(2) Derivata del prodotto

$\vec{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $\qquad g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

HA SENSO $h = g \cdot \vec{f}$

- IN COMPONENTI :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(g \vec{f} \right)_j = \frac{\partial}{\partial x_i} g f_j =$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} g \; f_j + g \frac{\partial}{\partial x} f_j}$$

- Se $M = 1$ (f è scalare) j può solo essere 1
e la formula sopra può essere detta :

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$$ (eguaglianza di vettori)

$$\left[\ \frac{\partial}{\partial x_i} fg = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) g + f\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right)\ \right]$$

- In generale la formula si può esprimere:

$$\boxed{J_{g\vec{f}} = \nabla g \times \vec{f} + g\, J_{\vec{f}}}$$ (relazione tra matrici $M \times N$)

$\vec{f}$, $g \cdot \vec{f}$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $\Rightarrow$ $J_{\vec{f}}$ e J_{gf} MATRICI $M \times N$

$\nabla g \in \mathbb{R}^N$, $\vec{f} \in \mathbb{R}^M$; la matrice $a \times b$ è

definita da $(a \times b)_{ij}$ $a_i b_j$ $i = 1 \ldots N$, $j = 1 \ldots n$

Quindi $\left(\nabla g \times \vec{f}\right)_{ij} = \dfrac{\partial g}{\partial x_i} f_j$

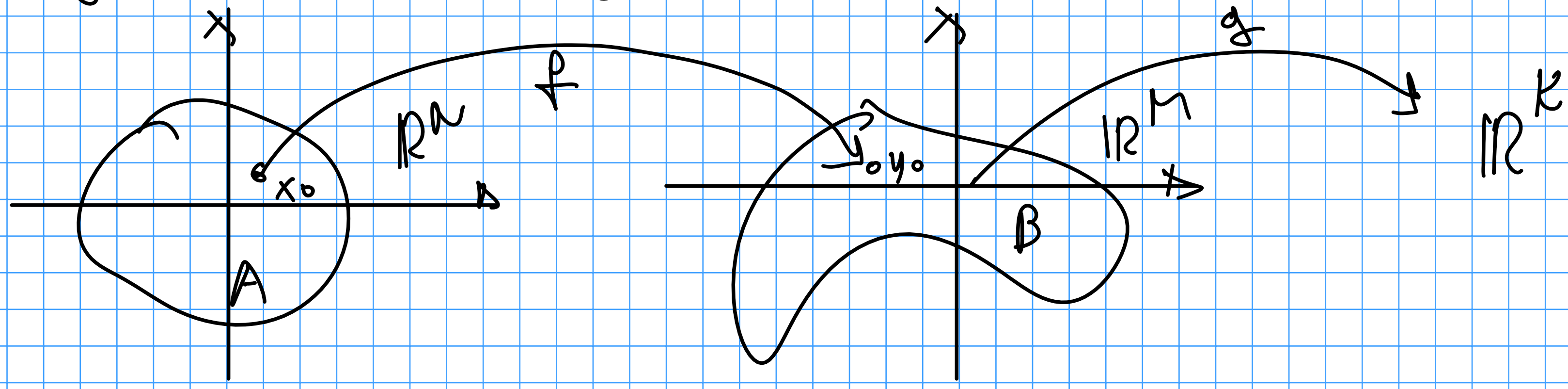
- DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^k$

ANZI $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in A$

$B \subset \mathbb{R}^M$ aperto $\quad y_0 = f(x_0) \in B$

$f : A \to B \qquad g : B \to \mathbb{R}^K$



$g \circ f : A \to \mathbb{R}^K$ è ben definita

<u>IPOTESI</u> $\quad f$ DIFFERENZIABILE IN x_0

g DIFFERENZIABILE IN $y_0 = f(x_0)$

<u>TESI</u> $\quad g \circ f$ È DIFFERENZIABILE IN x_0

e $\quad d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$

IN TERMINI JACOBIANI: $\quad J_{g \circ f}(x_0) = J_g(y_0)\, J_f(x_0)$ (PRODOTTO TRA MATRICI)

$K \times N$ $\quad$ $K \times M$ $\quad$ $M \times N$

QUESTO MI DÀ :

$$\frac{\partial}{x_i}(g \circ f)_k(x_0) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial}{\partial y_j} g_k(y_0) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_0)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_0) \frac{\partial}{\partial y_j} g_k(y_0)$$

CASO PARTICOLARE

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \qquad \text{(curva)}$$

HA SENSO FARE $h = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\gamma(t)) \qquad t \in \mathbb{R}$$

APPLICANDO LA FORMULA SULLA DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE

$$J_h(t) = J_f(\gamma(t))\, J_\gamma(t)$$

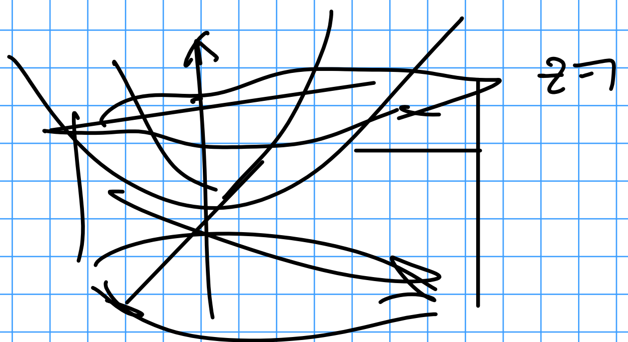
$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t))\, \gamma'(t)$$

DUNQUE

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$

SE $\gamma(t)$ "VIAGGIA" SU UN INSIEME DI LIVELLO

$$\Rightarrow \nabla f \perp \gamma'(t)$$



INCOMPRENSIBILE