Analisi Matematica II
Lezione 12
21 ottobre 2015

Consideriamo

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \qquad \text{per } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

<u>DOMANDA</u>. f è continua?

Se $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ $\quad f$ è continua in (x_0, y_0)

dato che

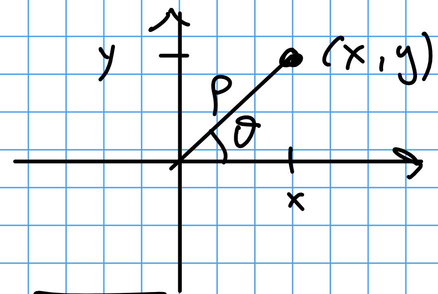
$$(x,y) \mapsto x \qquad (x,y) \mapsto y$$

SONO CONTINUE

Dato che $f(x,y)$ si ottiene mediante somme/prodotti/quozienti di x e y $\Rightarrow$ f è continua purché $x_0^2+y_0^2 \neq 0$ e cioè per $(x_0,y_0) \neq 0$.

RIMANE la questione nell'origine. Devo chiedermi se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad ?$$



USIAMO LE COORDINATE POLARI

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = \rho\sin\theta \qquad \theta = ----$$

In termini di ρ e θ la funzione diventa

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\;\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \rho^2\cos\theta\sin^3\theta$$

Se guardo la def di limite vedo che

FATTO GENERALE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, \delta>0 \text{ tale che } 0<\rho<\delta \Rightarrow |\tilde{f}(\rho,\theta)|<\varepsilon \quad \boxed{\text{qualunque sia } \theta}$$

δ NON DEVE DIPENDERE DA θ

NEL NOSTRO CASO QUESTO È VERO COME SI VEDE:

$$|\tilde{f}(\rho,\theta)| = \rho^2 |\cos\theta \sin^3(\theta)| \le \rho^2$$

← NON C'È PIÙ IL θ!!

SE AVESSI TENTATO QUESTO SISTEMA CON $\frac{xy}{x^2+y^2}$ AVREI TROVATO $\frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta\sin\theta$

che non tende a zero per $\rho\to 0$ (e non tende a nulla visto che ha valori costanti, diversi ha loro, su ogni θ)

$\boxed{\text{F.}}$ Se L è "un" differenziale per f in x_0 allora

$$L\vec{v} = f'(x_0)(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

<u>Dim.</u> L differenziale significa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

$(\vec{v} \neq 0)$

Se questo è vero $\Rightarrow$ fissata la curva $t \mapsto x_0 + t\vec{v}$

deve essere

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0) - L(x_0+t\vec{v}-x_0)}{\|x_0+t\vec{v} - x_0\|} = 0$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0) - tL\vec{v}}{t\,\|\vec{v}\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+tv)-f(x)}{t} = L\vec{v}}$$

Dato che la formula è vera $\forall \vec{v}$ posso scriverla per $-\vec{v}$ e allora

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 - t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = -L\vec{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = -t \qquad \lim_{s \to 0^-} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{-s} = -L\vec{v} \iff$$

$$\boxed{\lim_{s \to 0^-} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{s} = L\vec{v}}$$

Mettendo insieme le due ho:

$$f'(x_0)(\vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0)}{h} = L\vec{v}$$

FINE

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

FATTO $\quad f$ è continua in $(0,0)$.

IN COORDINATE POLARI

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} = \rho\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(\rho,\theta)| \leq \rho \quad \text{Dunque } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

FACCIAMO LE DERIVATE DIREZIONALI

FISSO UN VETTORE $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ e calcolo

$$\frac{f(0+t\vec{v}) - f(0)^{=0}}{t} = \frac{f(tv_x, tv_y)}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2 (v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + v_y^2}$$

DUNQUE $f'(0)(\vec{v}) = \dfrac{v_x v_y^2}{v_x^2 + v_y^2}$ NON È LINEARE IN $\vec{v}$

DUNQUE f NON È DIFFERENZIABILE

(MA HA DERIVATE DIREZIONALI RISPETTO A QUALUNQUE DIREZIONE).

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE ($N=2$)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ aperto e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A

Se esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$ per ogni P di un intorno di P_0, e se
(per ogni $P \in A$)

$$\lim_{P\to P_0} \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

$$\lim_{P\to P_0} \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$$

ALLORA f è differenziabile in P_0.

<u>Dim</u> ~~Per~~ $P=(x,y)$ in A chiamo

$$\Delta(x,y) = \Delta(P) = \boxed{f(P) - f(P_0) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)}^{L}}$$

(devo dimostrare che $\dfrac{\Delta(P)}{\|P-P_0\|} \to 0$ quando $P \to P_0$

se lo faccio trovo che $L(v_x, v_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)v_y$ è il differenziale di f in P_0)

$$\Delta(P) = \Delta(x,y) = \Delta(x,y_0) + \frac{\partial\Delta}{\partial y}(x, \underbrace{\eta(x,y)})(y-y_0) =$$

HO USATO IL TEOREMA DI LAGRANGE RISPETTO ALLA Y

$\eta(x,y)$ è compreso tra y e y_0

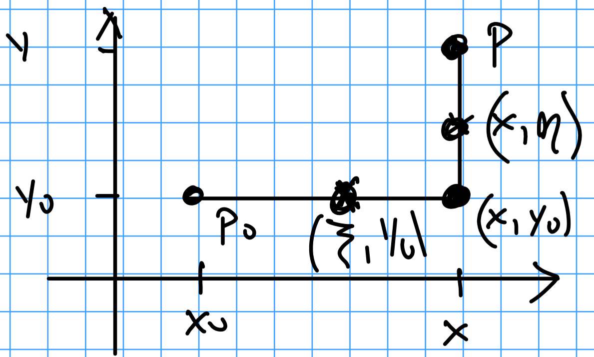
$$\Delta(x,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,\eta(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0) = \left(\begin{array}{c}\text{LAGRANGE}\\ \text{RISPETTO A } x\end{array}\right)$$

$$= \Delta(\underset{\substack{\|\\ 0}}{x_0,y_0}) + \frac{\partial}{\partial x}\Delta(\xi, y_0)(x-x_0) - \frac{\partial}{\partial y}\Delta(x,\eta)(y-y_0) =$$

ξ compreso tra x e x_0

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\xi(x,y_0),y_0) - \frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0) +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,\eta(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0) \quad \left(= \Delta(x,y)\right)$$



DUNQUE (USO SCHWARTZ)

$$\frac{|\Delta(x,y)|}{\|P-P_0\|} \le \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\xi,y_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,\eta) - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y_0)\right)\vec{j} \right\|$$

SE $P \to P_0 \Rightarrow (x,\eta)$ e (ξ, y_0) TENDONO A P_0

DATO CHE $\frac{\partial}{\partial x} f$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in $P_0 \Rightarrow$

la parte a dx tende a zero quando $P \to P_0$

e questo dimostro $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{\Delta(P)}{\|P-P_0\|} = 0$ cioè la tesi //

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{x y^3}{x^2+y^2} \qquad \left(f(0,0) = 0 \right)$$

OSSERVO che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$. Se f è differenziabile sicuramente $df(0,0) = 0$

(è la applicazione nulla)

DICO CHE f è differenziabile.

Lo posso dimostrare in due modi

(1) Dalla definizione. Devo allora dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - 0x - 0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{e cioè}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

PASSO IN COORD. POLARI $\Longrightarrow$

$$\frac{\rho\cos\theta\,\rho^3\sin^3\theta}{\rho^3} = \rho\cos\theta\sin^3\theta$$

QUESTO È $\leq \rho$ e dunque tende a zero!

(2) USO IL TEOR. DEL DIFF. TOTALE.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - x y^3\, 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3\, 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

TUTTE QUESTE ESPRESSIONI TENDONO A ZERO

(E CIOÈ A $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ / $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ \

Per esempio $\frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}$ = (coordinate polari)

$\frac{\rho^5}{\rho^4} \cos^2\theta \sin^3\theta \leq \rho$ ... si fa come prima.