Analisi Matematica II
Lezione 11
20 ottobre 2015

Esempi

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \text{dove } f(x,y) = \frac{x(x-y^2)}{x^2+y^4}$$

__Nota:__ Dominio di f è l'insieme $\{(x,y) \neq (0,0)\} =: D$ e il punto $(0,0)$ è di accumulazione per $D \Rightarrow$ HA SENSO DOMANDARSI SE ESISTE IL LIMITE.

Vediamo (per curiosità) la restrizione sulle rette per l'origine. $y = mx \qquad m \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-m^2x^2)}{x^2+m^4x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2x}{1+m^4x^2} = 1$$ (se f ammette limite ℓ $\Rightarrow$ $\ell = 1$)

PERÒ si vede subito che $f(x,y)=0$ se $x=0$ oppure se $x=y^2$

DATO CHE $\{x=0\}$, $\{(x,x^2), x\in \mathbb{R}\}$ HANNO $(0,0)$ COME PUNTO DI ACCUMULAZIONE $\Rightarrow$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 0$$

NE SEGUE CHE IL $\boxed{\text{LIMITE NON ESISTE}}$

(CI SONO RESTRIZIONI DIVERSE CON LIMITI DIVERSI)

OSSERVAZIONE f È LIMITATA (anche se non ha limite) . Posso vederla così:

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4}}_{f_1(x,y)} - \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^4}}_{f_2(x,y)}$$

$$0 \le f_1(x,y) \le \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \left(|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2} \right)$$

$$|f_2(x,y)| \le \frac{\frac{x^2+y^4}{2}}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$$

DUNQUE f è LIMITATA.

ESEMPIO

$$f(x,y) = y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

DOMINIO $\{y \neq 0\}$ $(0,0)$ è di accumulazione

HA SENSO FARE IL LIMITE.

Ricordiamo che $|\sin(t)| \leq |t| \implies$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y| \left|\frac{x}{y}\right| = |x|$$

So che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = \left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\right| = |0| = 0$

Applico "i carabinieri" $\implies \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^4+y^4}$$ al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$\underline{\alpha = 2}$ $\displaystyle f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}$ Provo con $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{(x^2 + m^2x^2)^2}{x^4 + m^4x^4} = \frac{x^4(1+m^2)^2}{x^4(1+m^4)} = \frac{(1+m^2)^2}{1+m^4}$$

COSTANTE, MA LA COSTANTE DIPENDE DA M

$\Rightarrow \nexists$ limite

<u>$\alpha > 2$</u>

$$(x^2+y^2)^\alpha = \left((x^2+y^2)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\left(x^4 + y^4 + \underbrace{2x^2y^2}_{\leq x^4+y^4}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \left(x^4+y^4+x^4+y^4\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x,y) \leq \frac{\left[2(x^4+y^4)\right]^{\frac{\alpha}{2}}}{x^4+y^4} = 2^{\frac{\alpha}{2}}(x^4+y^4)^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

CHIARAMENTE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+y^4)^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0$

$\Rightarrow$ f tende a zero (se $\alpha > 2$)

$0 < \alpha < 2$

USO IL FATTO CHE

$$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 \geq x^4+y^4$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \geq \frac{(x^4+y^4)^{\frac{\alpha}{2}}}{x^4+y^4} = \frac{1}{(x^4+y^4)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$$