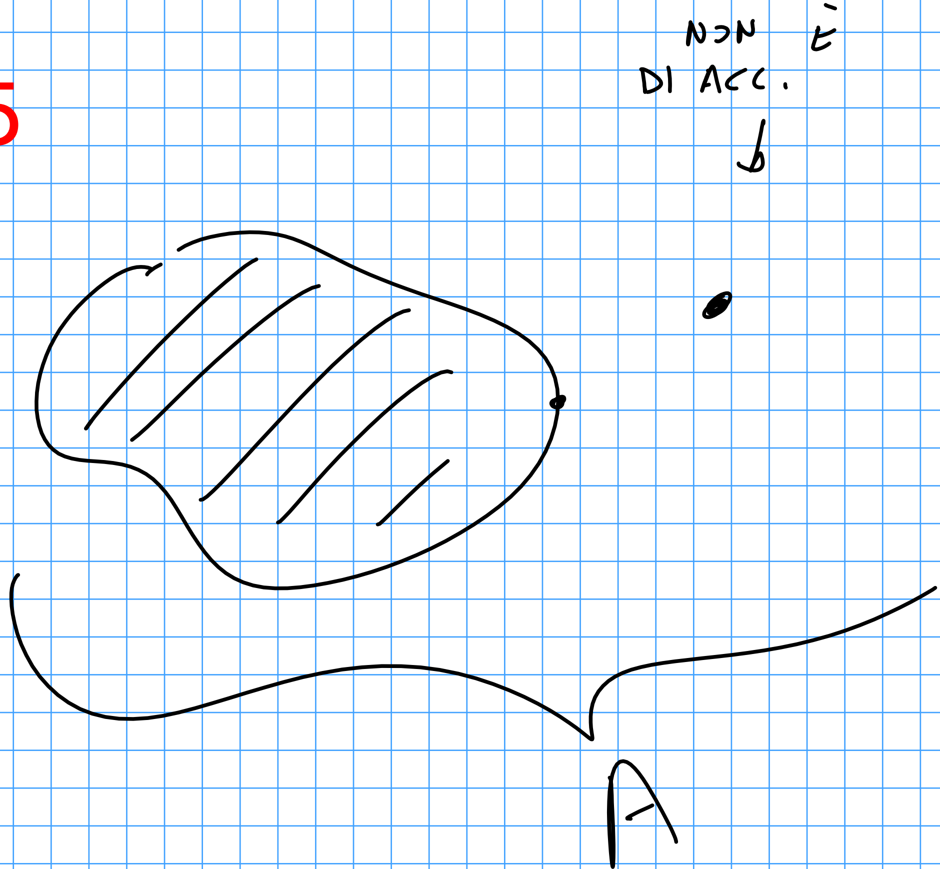
Analisi Matematica II
Lezione 10
19 ottobre 2015



ESEMPIO

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 < 1 \}$$

(B è il "cerchio aperto" di raggio uno, centro l'origine)

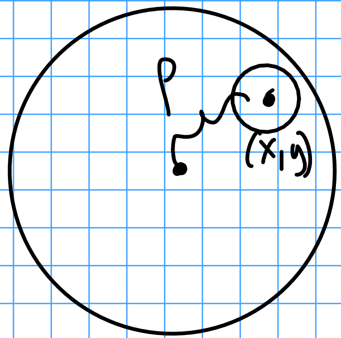
• $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è INTERNO A $B \iff x^2+y^2<1$

cioè se e solo se $(x,y) \in B$.

INFATTI (a) Se (x,y) è interno a $B \Rightarrow (x,y) \in B$

(b) se $(x,y) \in B$, allora $x^2+y^2 \left(=:\rho^2\right) < 1$

Prendiamo $r < 1-\rho$. Questo r lo posso prendere >0



Prendiamo $B((x,y),r)$

Dico che $B((x,y),r) \subset B$

Infatti se $(x',y') \in B((x,y),r)$

$$\iff \|(x,y)-(x',y')\| < r$$

MA ALLORA ((x',y') è un generico punto di $B((x,y),r)$)

$$\|(x',y')-(0,0)\| = \|(x',y')\| = \|(x',y')-(x,y)+(x,y)\| \le$$

$$\underbrace{\|(x',y')-(x,y)\|}_{<r} + \underbrace{\|(x,y)\|}_{=\rho} < r+\rho < 1$$ (per la scelta di r

$\Rightarrow \quad (x',y) \in B$

(RIASSUMENDO: se $P \in B((x,y), r) \Rightarrow P \in B$, dunque

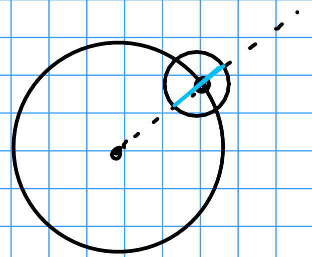
$$B((x,y),r) \subset B \quad).$$

TUTTI I PUNTI DI B SONO INTERNI $\Rightarrow$ B è APERTO

• $\partial B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ $\left(=: S((0,0),1) \right.$ circonferenza unitaria$\left.\right)$

INFATTI DATO $(x,y) \in S$ (cioè tale che $x^2+y^2=1$)

e dato $r>0 \Rightarrow$ i punti $t(x,y)$ con $1-r < t < 1+r$



sono in $B((x,y),r)$

$$\left(\|(x,y) - t(x,y)\| = \|(1-t)(x,y)\| = \right.$$

$$|1-t| \, \underbrace{\|(x,y)\|}_{=1} = |1-t| < r \text{ se } 1-r<t<1+r$$

MA: • se $1-r < t < 1 \Rightarrow t(x,y) \in B$ $\left(\|t(x,y)\| = |t| \right)$

• se $1 < t < 1+r \Rightarrow t(x,y) \notin B$

QUINDI – qualunque sia $r>0$ – trovo punti in $B((x,y),r)$

che sono anche in B e trovo punti in $B((x,y),r)$
che sono fuori di B
$\iff$ (x,y) è di frontiera (non può essere né
interno né esterno a B)

QUESTO DIMOSTRA CHE $S((0,0),1) \subset \partial B$

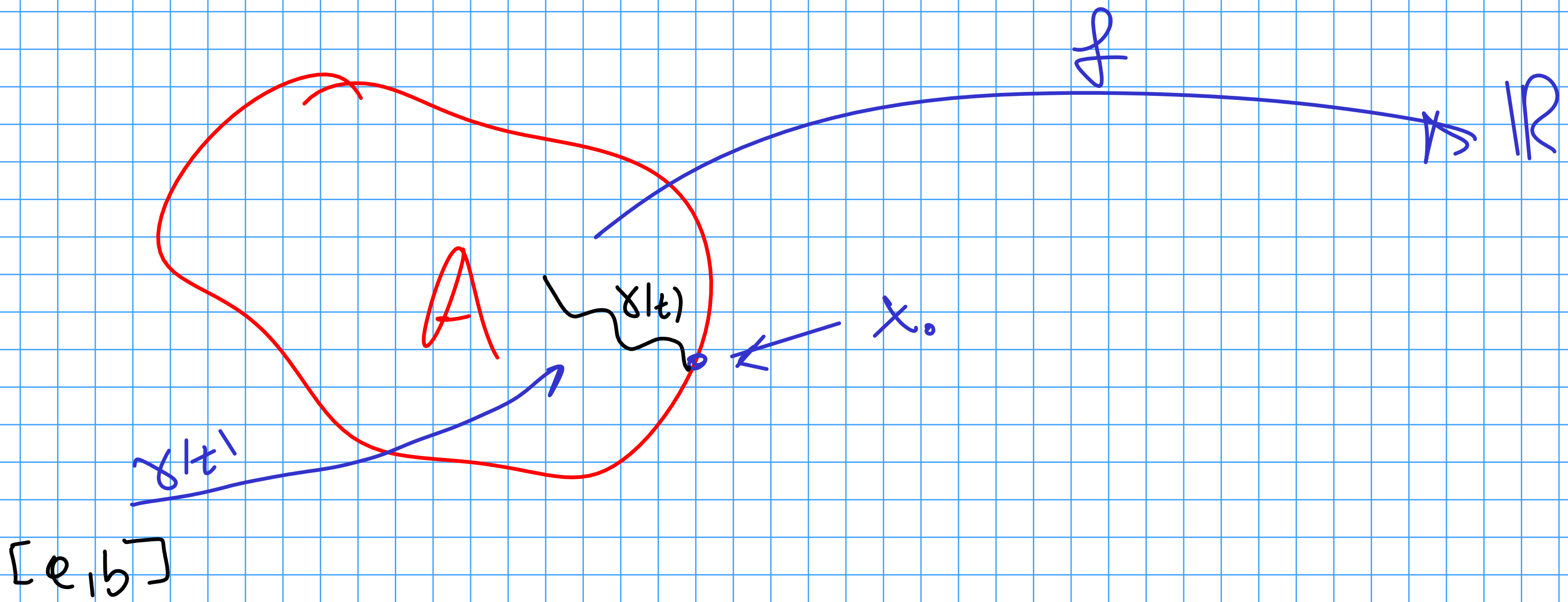
Si può vedere anche il viceversa (se $(x,y) \in \partial B$, necessariamente $(x,y) \in S((0,0),1)$ — ESERCIZIO.

DUNQUE $\overline{B} = B$ unito S $= \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

ESERCIZIO

$$A := \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}.$$

TROVARE ∂A $\quad$ $\text{int}(A)$ $\quad$ $\overline{A}$



Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow$

su ogni curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ tale che:

$\gamma(t) \in A$ per $t > a$, $\gamma(a) = x_0$

si ha $\lim_{t \to a^+} f(\gamma(t)) = \ell$

ESEMPI

- $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

f è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ (TUTTO IL PIANO ESCLUSA L'ORIGINE)

<u>OSSERVAZIONE</u> Se mi restringo a $B := \{x=0\} \setminus \{0,0\}$ cioè all'asse y (meno l'origine), VEDO CHE

$$f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$$

NE SEGUE CHE $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = 0$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_B (x,y)$$

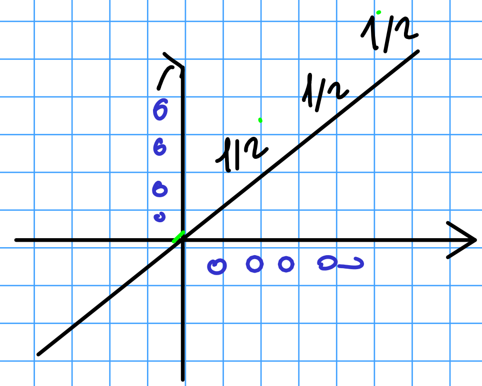
NELLO STESSO MODO VEDO CHE LA RESTRIZIONE ALL'ASSE X

($\{y=0\}$) È IDENTICAMENTE NULLA E QUINDI TENDE A 0.

SE ESISTE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ TALE LIMITE NON PUÒ CHE ESSERE ZERO.

SE PERÒ MI METTO SU $B_1 := \{(x,y) : x=y\}$ (bisettrice del I° / III° QUADRANTE) $\Rightarrow$

$$f(x,y) = f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$



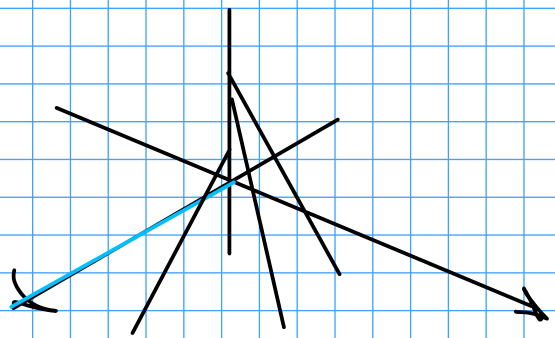
__DUNQUE__ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{B_1}(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ NON ESISTE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

__NOTA__ Se mi metto su $\{(x,y) : y = mx\}$ trovo

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$\Rightarrow$ f è costante su ogni retta passante per l'origine,

ma la costante dipende dalla retta



f non ha limite in $(0,0)$

ESEMPIO 2 $\qquad f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ (definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$)

DICO CHE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

NOTO che, se $y = mx$ viene $f(x,mx) = \dfrac{m x^3}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}x$

$\to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$ [SU OGNI RETTA PER L'ORIGINE f TENDE A 0]

QUESTO, PER LA VERITÀ, <u>NON BASTA</u>

PER MOSTRARE CHE IL LIMITE FA ZERO USERÒ:

FATTO dati $a, b \in \mathbb{R}$ vale $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

In effetti $2ab \leq a^2+b^2 \iff a^2+b^2-2ab \geq 0$

$\iff (a-b)^2 \geq 0$ VERO

DUNQUE:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{\overbrace{x|y|^{1/2}}^{a}\ \overbrace{|y|^{3/2}}^{b}}{x^2+y^2} \leq \left(\frac{x^2|y|+y^2|y|}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)|y|}{2(x^2+y^2)} = \frac{|y|}{2}$$

È CHIARO CHE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{2} = 0$

ALLORA $0 \leq |f(x,y)| \leq \dfrac{|y|}{2}$

$0 \to 0$, $\dfrac{|y|}{2} \to 0$ [se $(x,y) \to (0,0)$]

$\Rightarrow \quad |f(x,y)| \to 0$

$\Leftrightarrow \quad f(x,y) \to 0$

OSS. (A PROPOSITO DEL I° ESEMPIO)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

f È LIMITATA, dato che $|f(x,y)| \le \dfrac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$

(ma, come visto prima, f non ha limite in $(0,0)$

Non appena la moltiplico per una qualsiasi infinitesimo diventa infinitesima $\to$ ESEMPIO 2)

ESEMPIO 3

$$f(x,y) := \frac{|x-y^2|}{x^2+y^2}$$

- Se mi metto su $x=0 \Rightarrow f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1$
- Se mi metto su $y=0 \Rightarrow f(x,0) = \frac{1}{|x|} \to +\infty$
- Se mi metto su $x = y^2 \Rightarrow f(y^2,y) = 0 \to 0$

DUNQUE NON ESISTE limite per $(x,y) \to (0,0)$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = ??$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y^2)}{x^2+y^4} = ??$