Analisi Matematica II
Lezione 09
14 ottobre 2015

Prendo una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ regolare e anzi derivabile due volte (o addirittura 3 volte)

Supponiamo anche γ iniettiva

Considero $\gamma_1 : [0, L] \to \mathbb{R}^N$ la riparametrizzata in lunghezza d'arco. Questo significa:

$$\gamma_1(s) = \gamma(\phi(s)) \quad \text{dove} \quad \phi = \ell^{-1} \quad \text{dove}$$

$$\boxed{\ell(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau}$$

(= lunghezza del tratto di γ tra a e t)

Quindi $\phi : [0, L] \to [a, b]$ $\quad L = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$

CHIAMO $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ (VELOCITÀ SCALARE di γ)

NOTA $\ell'(t) = v(t)$

CONVIENE SCRIVERE $v(P)$ se $P = \gamma(t)$

DEFINIZIONE $\vec{n}(s) := \frac{d}{ds} \underbrace{\vec{\gamma}_1'(s)}$

VETTORE DI MODULO 1 !!

$\vec{n}(s)$ è perpendicolare a $\vec{\gamma}_1'(s)$

PONGO $\hat{T}(P) = \vec{\gamma}_1'(s)$ dove s è tale che $P = \gamma_1(s)$

$\hat{N}(P) = \dfrac{\vec{n}(s)}{\|\vec{n}(s)\|}$

Se $\vec{n}(s) = 0$ $\hat{N}(P)$ NON È DEFINITA

$\hat{T}(P) =$ VERSORE TANGENTE IN P

$\hat{N}(P) =$ VERSORE NORMALE IN P

Per come nasce $\hat{N}$ si ha $\hat{N} \cdot \hat{T} = 0$.

POSSO RICAVARE $\hat{T}$ e $\hat{N}$ guardando la curva $\gamma(t)$ ORIGINARIA.

so che $\gamma(t) = \gamma_1(\ell(t)) \Rightarrow$

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{\gamma}_1'(\ell(t))\,\ell'(t) = \hat{T}(\ell(t))\,v(t) \leftarrow \circledast$$

$(v(t) \neq 0$ perché γ è regolare$) \Rightarrow$

$$\hat{T}(\ell(t)) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{v(t)} \left(= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\hat{T}(P) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{se } P = \gamma(t)}$

DERIVO LA $\circledast$

$$\vec{\gamma}''(t) = \vec{n}(\ell(t))\,v^2(t) + \hat{T}(\ell(t))\,v'(t) \leftarrow (\ast\ast)$$

Dato che $v(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}'(t)} \Rightarrow$ (derivo)

$$v'(t) = \frac{\cancel{2}\,\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)}{\cancel{2}\sqrt{\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)}}$$

, INSERISCO v' così ricavato in $(**)$ $\Longrightarrow$

$$\underbrace{\gamma''(t) - \underbrace{\frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}}_{\vec{T}}\left(\frac{\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}\right)} = v^2(t)\,\vec{n}\,(\ell(t)) \qquad (***)$$

$$\left(\|\vec{n}\| = \frac{1}{v^2}\left\|\gamma'' - \frac{\gamma''\cdot\gamma'}{\|\gamma'\|^2}\gamma'\right\|\right)$$

$\gamma''(t)$ privato della sua proiezione su $\vec{\gamma}'(t)$, cioè LA COMPONENTE DI $\gamma''(t)$ nel piano perpendicolare a $\hat{\gamma}'(t)$

Se passo ai moduli in $***$ e normalizzo

$$\frac{\vec{\gamma}'' - (\vec{\gamma}''\cdot\vec{\gamma}')\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|^2}}{\left\|\vec{\gamma}'' - (\vec{\gamma}''\cdot\vec{\gamma}')\frac{\vec{\gamma}'}{\|\gamma'\|^2}\right\|} = \hat{N}(P) \qquad \left(\gamma(t) = P\right)$$

$$\gamma_1(\ell(t))$$

SI DEFINISCE ANCHE LA CURVATURA DI γ NEL PUNTO $P = \gamma(t) = \gamma_1(\ell(t))$, PONENDO

$K(P) = \|\vec{n}(P)\|$. CON QUESTA DEFINIZIONE

$$\frac{d}{ds}\hat{T}(s) = k(s)\hat{N}(s)$$

. USANDO ~~xxx~~ VEDO CHE

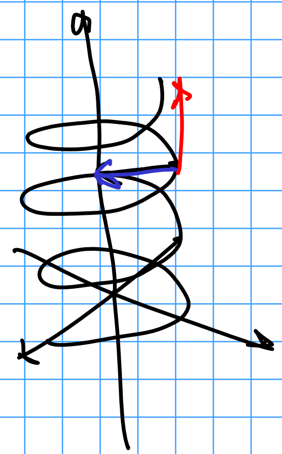
$$K(P) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\left\| \gamma''(t) - \frac{\gamma''(t)\cdot\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t)\right\| \qquad \left(P = \gamma(t)\right)$$

CHIAMO ANCHE RAGGIO DI CURVATURA

$$R(P) = \frac{1}{K(P)}$$

ESEMPIO (CURVATURA DELL'ELICA)

$$\gamma(t) = R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j} + a\,t\,\vec{k}$$



$$\gamma'(t) = -R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j} + a\vec{k}$$

NON E' NEL PIANO x, y

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + a^2} = v(t)$$

$\gamma''(t) = -R\cos(t)\vec{i} - R\sin(t)\vec{j}$

Dato che $\gamma'' \cdot \gamma' = 0$

$\Rightarrow \quad \hat{N}(P) = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} \qquad (P = \gamma(t))$

(Parallelo al piano x, y)

La curvatura è $\dfrac{\|\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^2} = \dfrac{R}{R^2+a^2}$

RAGGIO DI CURVATURA $= R + \dfrac{a^2}{R} \quad (> R)$

(IL CERCHIO OSCULATORE NON È NEL PIANO x y

e diventa sempre più grande se a cresce)

ORA $\boxed{N=3}$ CHIAMO BINORMALE IN P

$\hat{B}(P) = \hat{T}(P) \otimes \hat{N}(P)$

$(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ è una base ortonormale destrorsa in $\mathbb{R}^3$

(che dipende dal punto P)

TEOREMA (Formule di Frenet-Serret)

$$
(F.S.)\quad \begin{cases}
\hat{T}'(s) = K(P)\,\hat{N}(P) \\
\hat{N}'(s) = -K(P)\,\hat{T}(P) + \tau(P)\,\hat{B}(P) \\
\hat{B}'(s) = -\tau(P)\,\hat{N}(P)
\end{cases}
$$

(derivo rispetto alla lunghezza d'arco; $P = \gamma_1(s)$)

e dove $\tau(P)$ è una opportuna funzione scalare

$\tau(P)$ = TORSIONE DI γ NEL PUNTO P

DIM. • La prima è la definizione di $\hat{N}$ e K

• Dato che $\|\hat{N}(s)\| = 1 \Rightarrow \hat{N}' \perp N \Rightarrow$

$$\hat{N}'(s) = \alpha\,\hat{T}(s) + \beta\,\hat{B}(s)$$

Faccio il prodotto scalare con $\hat{T}(s)$

$$\hat{N}'(s)\cdot\hat{T}(s) = \alpha + 0$$

MI RICORDO CHE $\hat{N}(s)\cdot\hat{T}(s) = 0$; DERIVO IN S:

$$\underbrace{\hat{N}'(s)\cdot\hat{T}(s)}_{\alpha} + \hat{N}(s)\cdot\hat{T}'(s) = 0$$; RICAVO

$$\alpha = -\hat{N}(s)\,\hat{T}'(s) = -\hat{N}(s)\cdot\left(K(s)\,\hat{N}(s)\right) = -K(s)$$

POSSO CHIAMARE TORSIONE IL β della seconda formula

(e lo indico $\tau(p)$)

• COME SOPRA HO

$$\hat{B}'(s) = \alpha_1\,\hat{T}(s) + \beta_1\,\hat{N}(s)$$

Moltiplico per $\hat{T}(s) \Rightarrow$

$$\alpha_1 = \hat{B}'(s)\cdot\hat{T}(s)$$

Dato che $\hat{B}(s)\cdot\hat{T}(s)=0 \Rightarrow$

$$\underbrace{\hat{B}'(s)\cdot\hat{T}(s)}_{\alpha_1}+\underbrace{\hat{B}(s)\,\hat{T}'(s)}_{\underbrace{\hat{B}(s)\cdot\left(K(s)\,\hat{N}(s)\right)}_{=0}}=0 \qquad \Rightarrow \alpha_1=0$$

Moltiplico per $\hat{N}(s) \Rightarrow$

$$\hat{B}'(s)\cdot\hat{N}(s)=\beta_1$$

Uso il fatto che $\hat{B}(s)\cdot\hat{N}(s)=0$; derivo $\Rightarrow$

$$\underbrace{\hat{B}'(s)\cdot\hat{N}(s)}_{\beta_1}+\underbrace{\hat{B}(s)\cdot\hat{N}'(s)}_{\underbrace{\hat{B}(s)\cdot\left(-K(s)\,\hat{T}(s)+\tau(s)\hat{B}(s)\right)}_{\tau(s)}}=0$$

$\Rightarrow \quad \beta_1=-\tau(s)$ e la formula è dimostrata