Analisi Matematica II
Lezione 08
13 ottobre 2015

ESEMPI

(1) $\gamma(t) = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} \qquad -1 \leq t \leq 1$

DOMANDA $\quad \gamma$ regolare / regolare a tratti ?

È chiaro che γ è continua e derivabile

$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}\,'(t) \quad 2t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}$

$\vec{\gamma}\,'(t) \neq \vec{0} \qquad$ se e solo se $\quad t \neq 0$

ANZI $\quad \|\vec{\gamma}\,'(t)\|^2 = 4t^2 + 9t^4 \qquad$ quindi

$\|\vec{\gamma}\,'(t)\| = |t|\sqrt{4+9t^2}$

NON È REGOLARE — SE USO LA DEFINIZIONE VISTA A LEZIONE γ NON È NEANCHE REGOLARE A TRATTI: se spezzo $[-1, 1]$ IN DUE SOTTO INTERVALLI $[-1, 0]$ e $[0, 1]$ è sempre vero che $\vec{\gamma}'(0) = \vec{0}$ ... ??

POSSO PROVARE A RIPARAMETRIZZARE $\gamma(t)$ per esempio in lunghezza d'arco.

PER QUESTO DEVO CONSIDERARE

$$\frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{2t}{|t|\sqrt{4+9t^2}}\,\vec{i} + \frac{3t^2}{|t|\sqrt{4+9t^2}}\,\vec{j} =$$

* è la derivata di γ_1 riparametrizzato di γ in lunghezza d'arco

(che è definita se $t \neq 0$)

$$\frac{2\,\mathrm{sgn}(t)}{\sqrt{4+9t^2}}\,\vec{i} + \frac{3|t|}{\sqrt{4+9t^2}}\,\vec{j} \quad \xrightarrow{t \to 0^+} \vec{i}, \qquad \xrightarrow{t \to 0^-} -\vec{i}$$

NE RICAVO CHE, SE RIPARAMETRIZZO LA γ su $[0,1]$ OTTENGO UNA $\gamma_1 : [0, L]$ che è derivabile in $[0, L]$

(e $\vec{\gamma}_1'(0) = \vec{i}$)

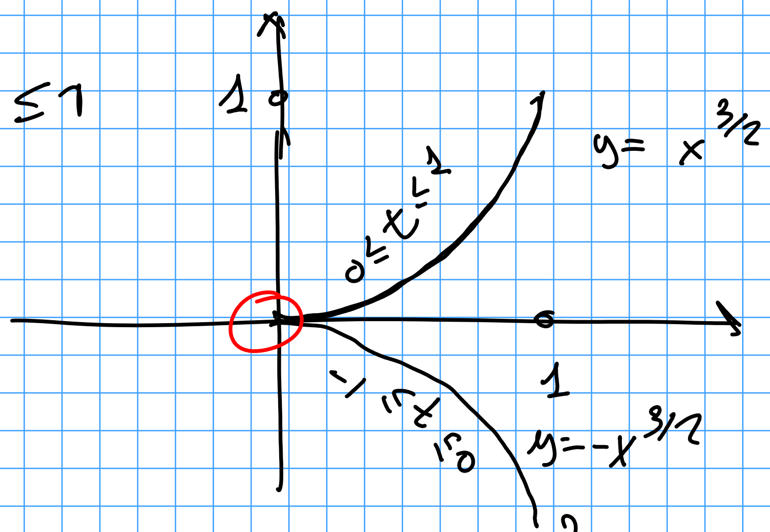
STESSO DISCORSO SE RIPARAMETRIZZO IL TRATTO DI γ TRA -1 e 0 (trovo $-\vec{i}$ come derivata in $s=0$)

DUNQUE SE RIPARAMETRIZZO TROVO UNA CURVA REGOLARE A TRATTI.

VEDIAMO COME È FATTA $\gamma(t)$

$\boxed{t \geq 0}$ $\quad \gamma(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = t^2\vec{i} + (t^2)^{3/2}\vec{j}$

con $0 \leq t^2 \leq 1$



(cambio di parametro $s = t^2 \iff t = \sqrt{s}$

Se invece $\boxed{t \leq 0}$, prendo $s = t^2 \Rightarrow$ trovo $s\vec{i} - s^{3/2}\vec{j}$

CALCOLIAMO LA LUNGHEZZA DI γ

$$\ell(\gamma) = 2\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$$ (la formula in realtà vale anche se γ' è nullo in $t=0$)

$$= 2\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\, dt$$ ($|t|$ diventa t, $t \geq 0$)

$$= \left(s = t^2,\ ds = 2t\, dt\right) = \int_0^1 \sqrt{4+9s}\, ds$$

$$\left[\frac{2}{3}(4+9s)^{3/2}\cdot\frac{1}{9}\right]_0^1 = \frac{2}{27}\left(13^{3/2} - 4^{3/2}\right) = 2\,\frac{13^{3/2}-8}{27}$$

2 $$\gamma(t) = (t-1)\vec{i} + (1-t^2)\vec{j} + \left(2+\frac{2}{3}t^3\right)\vec{k} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

È REGOLARE? SÌ INFATTI

$$\vec{\gamma}'(t) = \vec{i} - 2t\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k}$$ (la I° componente è $\neq 0$ $\forall t$)

CALCOLIAMO LA LUNGHEZZA:

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = \sqrt{(1+2t^2)^2} = 1+2t^2$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^1 (1+2t^2)\,dt = 1 + \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

TENTIAMO DI DISEGNARE il sostegno di γ

PREFERISCO CHIAMARE $t-1 = s \iff$

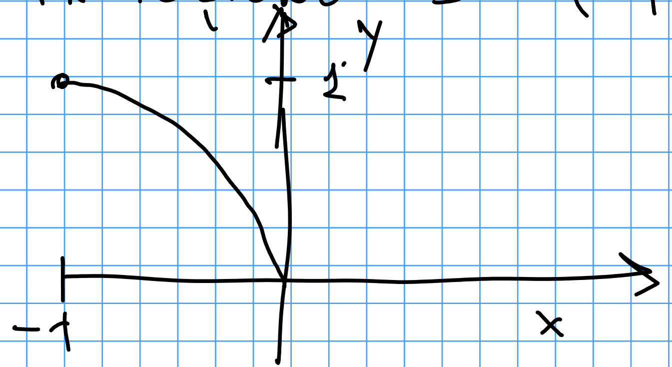
$-1 \le s \le 0$ $\quad t = s+1 \Rightarrow 1-t^2 = 1-(1+2s+s^2) =$

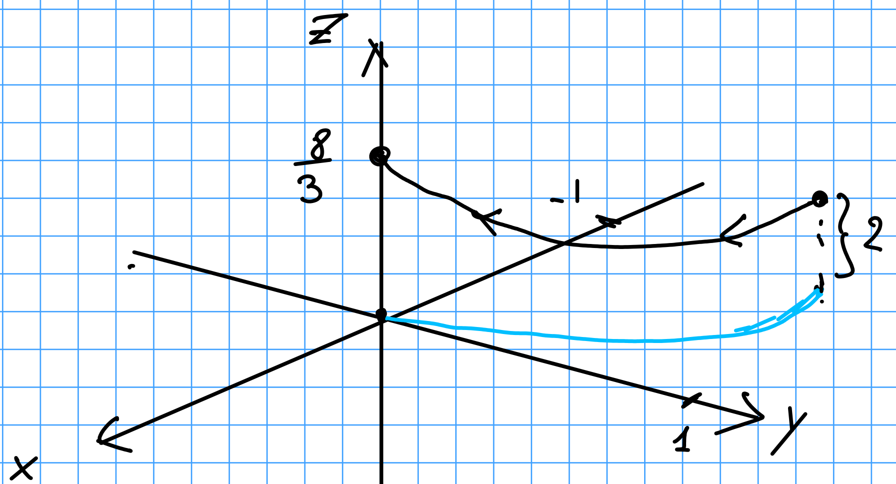
$= -2s - s^2 = -s(2+s)$

$$2+\frac{2}{3}t^3 = 2+\frac{2}{3}(1+3s+3s^2+s^3) = \frac{8}{3}+2s+2s^2+\frac{2}{3}s^3$$

TROVO $\gamma_1(s) = s\vec{i} - s(2+s)\vec{j} + \left(\frac{8}{3}+2s+2s^3+\frac{2}{3}s^3\right)\vec{k}$

LA PROIEZIONE SU (x,y) è il grafico di $f(x) = -x(2+x)$





② PRENDIAMO LA SPIRALE LOGARITMICA

$$\gamma(t) = e^t\left(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}\right) \qquad t \in \mathbb{R}$$

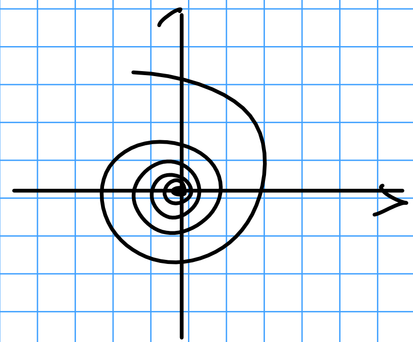
CAMBIO PARAMETRO $\quad e^t = s$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1(s) = s\left(\cos(\ln(s))\vec{i} + \sin(\ln(s))\vec{j}\right)$$

γ_1 è DEFINITA SU $]0, +\infty[$; IN REALTÀ LA POSSO PROLUNGARE IN $s=0$ PONENDO

$$\gamma_1(0) = \left(\lim_{s \to 0^+} \begin{matrix} s\cos(\ln(s)) = 0 \\ s\sin(\ln(s)) = 0 \end{matrix}\right)$$

ESTREMO SX DI γ_1 è $\vec{0}$



SE CALCOLO $\vec{\gamma}_1'(s)$ TROVO

$$\left(\cos(\ln(s))\vec{i} + \sin(\ln(s))\vec{j}\right) +$$

$$s\left(-\sin(\ln(s))\frac{1}{s}\,\vec{i} + \cos(\ln(s))\frac{1}{s}\,\vec{j}\right) =$$

$$\left(\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))\right)\vec{i} + \left(\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))\right)\vec{j}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\ln(s)) & -\sin(\ln(s)) \\ \sin(\ln(s)) & \cos(\ln(s)) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(\vec{i}+\vec{j})}$$

HA MODULO $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ VETTORE $\vec{i}+\vec{j}$ RUOTATO DI $\theta_s = \ln(s)$

NON ESISTE $\lim_{s \to \infty^+} \vec{\gamma}'(s)$

γ_1 NON REGOLARE E NON AMMETTE RIPARAMETRIZZAZIONI REGOLARI (in $[0,+\infty[$)

PERÒ LA LUNGHEZZA È FINITA SU OGNI $[0, \bar{s}]$

INFATTI

$$\int_0^{\bar{s}} \|\gamma'(\sigma)\| \, d\sigma = \int_0^{\bar{s}} \sqrt{2} \, d\sigma = \sqrt{2}\,\bar{s}$$