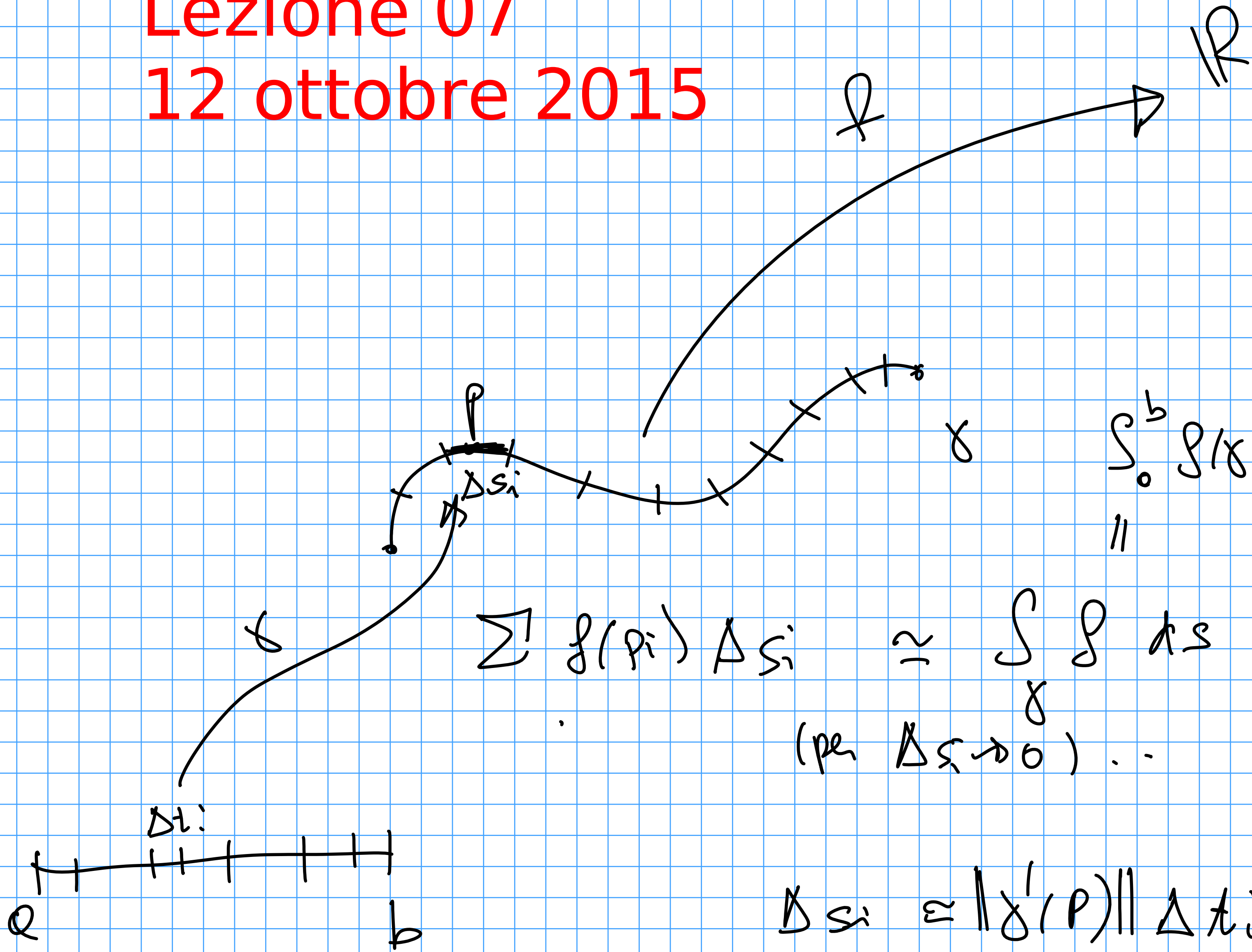
Analisi Matematica II
Lezione 07
12 ottobre 2015

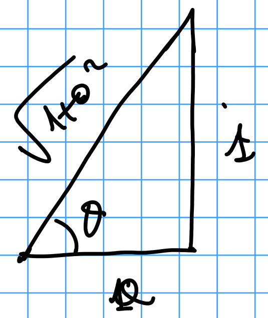


$$\sum f(p_i)\,\Delta s_i \simeq \int_\gamma f\, ds$$

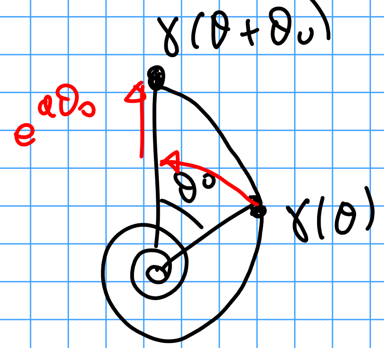
(per $\Delta s_i \to 0$) ..

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\Delta s_i \simeq \|\gamma'(p)\|\,\Delta t_i$$



$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$



PARAMETRIZZAZIONE IN LUNGHEZZA D'ARCO

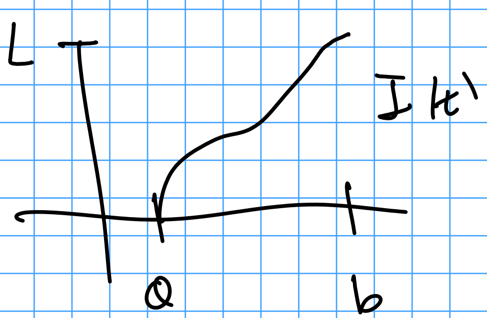
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ CURVA REGOLARE

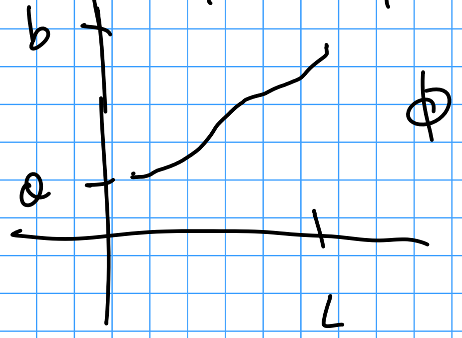
PONGO $$I(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$$

$I : [a,b] \to [0, L]$ dove $L = \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$

$I'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ (γ è regolare) $\Rightarrow I$ strett. crescente

PONGO $\phi(s) = I^{-1}(s)$ $\qquad \phi : [0,L] \to [a,b]$





Per la formula nota: $\displaystyle \phi'(s) = \frac{1}{I'(\phi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\phi(s))\|}$

Pongo ancora $\gamma_1(s) = \gamma(\phi(s))$ $\qquad (0 \le s \le L)$

$$\vec{\gamma}_1{}'(s) = \vec{\gamma}\,'(\phi(s))\,\phi'(s) = \frac{\vec{\gamma}\,'(\phi(s))}{\|\vec{\gamma}\,'(\phi(s))\|}$$

DUNQUE $\|\vec{\gamma}_1{}'(s)\| = 1 \qquad \forall s$

e quindi $\displaystyle \int_0^s \|\vec{\gamma}_1{}'(\sigma)\|\, d\sigma = \int_0^s 1\, d\sigma = s$

LUNGHEZZA DEL TRATTO DI γ_1 TRA 0 ed s

TEOREMA Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva regolare. ALLORA $\ell(\gamma) = \ell_g(\gamma) \left(= \sup_{\sigma} \sum_{i=1}^{K} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right)$

Dim. (a) Dimostro che $\ell_g(\gamma) \leq \ell(\gamma)$.

Fisso una suddivisione $\sigma = \{ \underset{a}{\overset{\parallel}{t_0}} < t_1 < \dots < t_K = b \}$

Noto che

$$\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{\gamma}'(\tau)\, d\tau \right\| \leq$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \| \vec{\gamma}'(\tau) \|\, d\tau$$

SOMMANDO

$$\sum_{i=1}^{K} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| \leq \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \| \vec{\gamma}'(\tau) \|\, d\tau = \int_a^b \| \vec{\gamma}'(\tau) \|\, d\tau = \ell(\gamma)$$

$\forall \sigma$ SUDDIVISIONE

LUNGHEZZA DELLA SPEZZATA INDIVIDUATA DA σ

Passando all'estremo superiore dunque

$$\ell_g(\gamma) \leq \ell(\gamma)$$

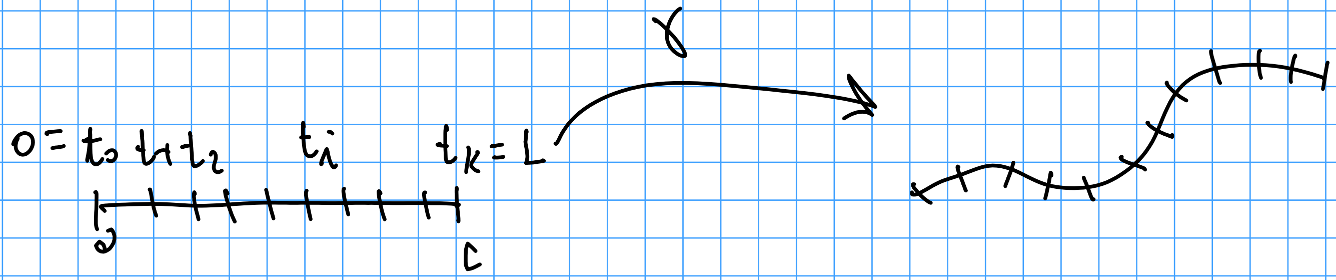
(b) DIMOSTRO LA DISUGAGLIANZA OPPOSTA CON UNA IPOTESI AGGIUNTIVA: γ ha <u>derivata seconda continua</u> (questa ipotesi si potrebbe togliere ma allora la dim. è più complicata!)

PRIMA DI TUTTO POSSO SUPPORRE CHE γ SIA parametrizzata in lunghezza d'arco:

$$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^N \qquad \text{dove } L = \ell(\gamma)$$

$$\text{e } \|\gamma'(t)\| = 1 \qquad (t = \text{lunghezza del tratto } [0,t])$$

DIVIDO $[0, L]$ in K sottointervalli di eguale ampiezza $\frac{L}{K}$



$\forall i = 1 \dots K$ si ha che (Taylor con resto di Lagrange)

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(t_{i-1}) + \gamma_j'(t_{i-1})(t - t_{i-1}) + \frac{\gamma_j''(\xi_i)}{2}(t - t_{i-1})^2 \quad t_{i-1} \le t \le t_i$$

$j = 1 \dots N$ (COMPONENTE j-ESIMA) $\quad t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$

Dato che $\vec{\gamma}''$ è continua dove una costante C tale che

$$|\gamma_j''(\xi_i)| \le C \quad \text{per ogni } i = 1 \dots K, \text{ per } j = 1 \dots N$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(t) - \gamma(t_{i-1}) = \gamma'(t_{i-1})(t - t_{i-1}) + \frac{R(t)}{2}(t - t_{i-1})^2 \quad t_{i-1} \le t \le t_i}$$

dove $\|R\| \le C$ (ORA C'È UN VETTORE)

Facciamo $\displaystyle\sum_{i=1}^{K} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \ge$ (metto $t = t_i$ sopra)

$$\sum_{i=1}^{K} \|\gamma'(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) - \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \frac{C}{2}(t_i - t_{i-1})^2}_{\text{ERRORE}}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \|\gamma'(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) - \underbrace{\left(\frac{L}{K}\right)^2 K \frac{c}{2}}_{= \frac{c}{2} \frac{L^2}{K} \to 0 \text{ PER } K \to \infty}$$

SOMMA DI RIEMAN !

E TENDE A $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

DUNQUE, MANDANDO $K \to +\infty$, TROVO

$$\ell_g(\gamma) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \ell(\gamma)$$

CHE È QUELLO CHE VOLEVO !!