Analisi Matematica II
Lezione 06
7 ottobre 2015

PROPRIETÀ DELLA SPIRALE

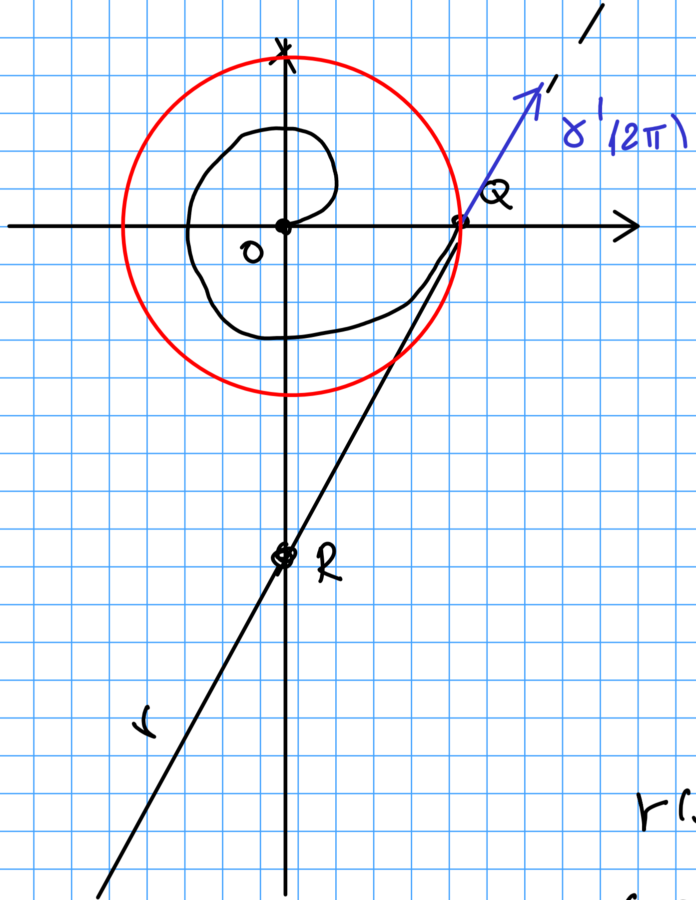
$$\gamma(t) = a t \underbrace{\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right)}_{\hat{\gamma}(t)} = a t\, \hat{\gamma}(t)$$

$$\gamma'(t) = a\, \hat{\gamma}(t) + a t\, \hat{\gamma}'(t) \qquad \hat{\gamma}'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}$$

CHIARO CHE $\hat{\gamma} \perp \hat{\gamma}'$ (perché $\|\hat{\gamma}(t)\| = 1 \quad \forall t$)

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = a^2 \underbrace{\|\hat{\gamma}(t)\|^2}_{=1} + a^2 t^2 \underbrace{\|\hat{\gamma}'(t)\|^2}_{=1} = a^2 + a^2 t^2$$

DUNQUE $\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{1+t^2}$



$Q = (0, 2\pi a)$

Q si ottiene per $t = 2\pi$

IN $t = 2\pi$ la derivata fa

$$\gamma'(2\pi) = a\,\hat{\gamma}(2\pi) + a\,2\pi\,\hat{\gamma}'(2\pi) = a\,\vec{i} + a\,2\pi\,\vec{j}$$

CONSIDERO LA RETTA TANGENTE IN Q

$$r(s) = \gamma(2\pi) + s\,\gamma'(2\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi a \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 2\pi a \end{pmatrix}$$

L'INTERSEZIONE DI r con l'asse y si ottiene per s tale che

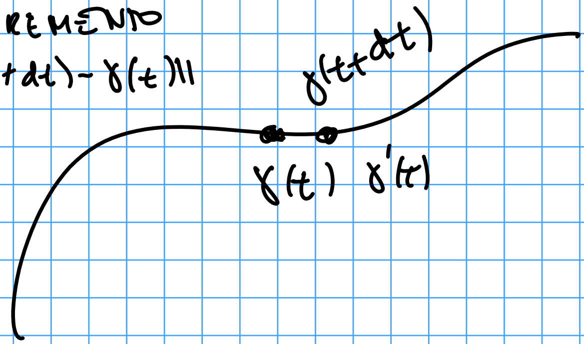
$2\pi a + s a = 0$ cioè $s = -2\pi$ $\Rightarrow$ R ha coordinate

$$r(-2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(2\pi)^2 a \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{OR} = 4\pi^2 a = 2\pi\,(\underbrace{2\pi a}_{\overline{OQ}}) =$$

lunghezza della circonferenza di raggio $\overline{OQ}$

INTEGRALE CURVILINEO $\int_\gamma f \, ds$

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\sim \text{ INCREMENTO } \|\gamma(t+dt)-\gamma(t)\|} dt$$



L'INTEGRALE CURVILINEO NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE (DERIVABILI CON DERIVATA $\neq 0$)

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ $\qquad \phi : [c,d] \to [a,b]$

con ϕ bigettiva e ϕ di classe C^1 ($\exists\, \phi'$ continua)

SUPPONGO ANCHE $\phi'(s) \neq 0$

PONGO $\gamma_1(s) = \gamma(\phi(s))$. ALLORA

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_\gamma f \, ds$$

(per qualunque $f : spt(\gamma) \to \mathbb{R}$)

DIM. (applico la def.)

$$\gamma_1'(s) = \phi'(s)\,\gamma'(\phi(s))$$ DUNQUE

$$\int_{\gamma_1} f = \int_c^d f(\gamma_1(s))\,\|\gamma_1'(s)\|\,ds =$$

$$\int_c^d f(\gamma(\phi(s)))\,|\phi'(s)|\,\|\gamma'(\phi(s))\|\,ds = \otimes$$

CI SONO DUE POSSIBILITÀ: $\phi'(s) > 0 \ \forall s$ (I)

$\phi'(s) < 0 \ \forall s$ (II)

(perché ϕ è bigettivo $\Rightarrow$ ϕ strett. monotono)

NEL CASO (I)

$$\otimes = \int_c^d f(\gamma(\phi(s)))\,\phi'(s)\,\|\gamma'(\phi(s))\|\,ds =$$

sostituisco $t = \phi(s)$

$$= \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f$$

NEL CASO II :

$$\circledast = -\int_c^d f(\gamma(\phi(s)))\,\phi'(s)\,\|\gamma'(\phi(s))\|\,ds =$$

$$- \int_{\phi(c) \leftarrow b}^{\phi(d) \leftarrow a} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f$$