Analisi Matematica II
Lezione 05
6 ottobre 2015

$$\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$$

La matrice corrispondente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ VOGLIO TROVARE SE È DEFINITA

$$\underbrace{a_{11} = 1 > 0 \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1-4 = -3}_{\text{INDEFINITA (NÉ } \geq 0 \text{, NÉ } \leq 0\text{)}} \qquad \det A =$$

SE VOGLIAMO DI PIÙ POSSIAMO CALCOLARE AUTOVALORI /

AUTOVETTORI

NOTA Si vede facilmente che $\lambda_3 = 1$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Per trovare gli altri due λ_i si può guardare la matrice $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} = \tilde{A}$ su $\mathbb{R}^2$ .. Faccio il pol. caratt. di $\tilde{A}$:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

che ha come radici $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1 \qquad \left(\begin{array}{l} 2 \text{ autov.} > 0 \\ 1 \text{ autov.} < \end{array}\right)$$

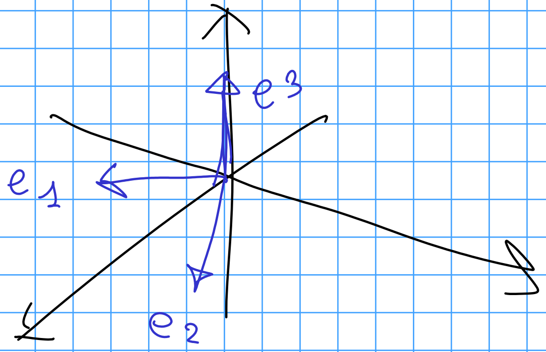
VEDIAMO ANCHE GLI AUTOVETTORI DI $\tilde{A}$. $\lambda = \lambda_1 = -1$

$$\begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \underline{x = -y}$$

POSSO PRENDERE $\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ che dà $e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

E USANDO L'ORTOGONALITÀ TROVO

$$\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Per esempio posso cercare di capire come è fatto

$$\{ \phi(x,y,z) = 1 \}$$

VISTO NELLE COORDINATE RISPETTO AI TRE AUTOVETTORI DIVENTA

$$\phi(x', y', z')$$

$$P = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(P di coordinate (x,y,z) diventa di coord. (x', y', z') nella base $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2$ $\vec{e}_3$)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy = \phi(P) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 =$$

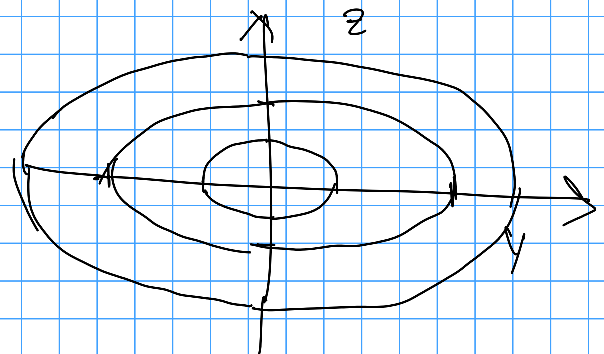
$$- (x')^2 + 3 (y')^2 + (z')^2$$

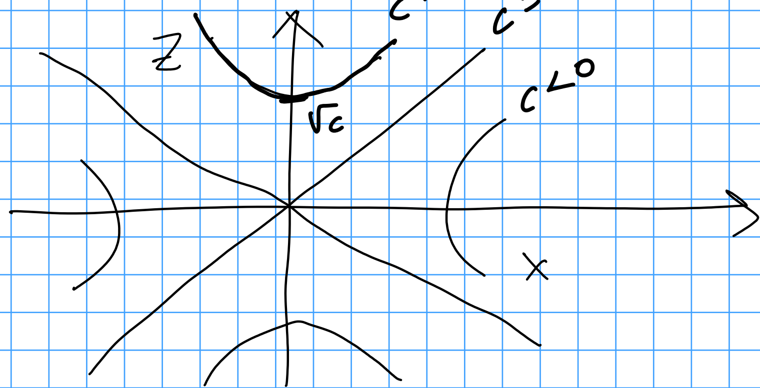
CONTINUO A CHIAMARE x, y, z le coordinate e quindi devo studiare

$$\{ -x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \}$$ ← COME È FATTO ?!?

$$3y^2 + z^2 = 1 + x^2$$

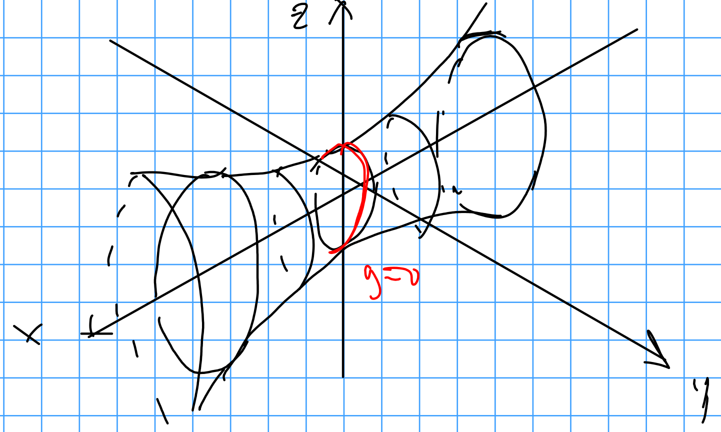
SE FISSO x $\Rightarrow$ $\{(y,z) : 3y^2 + z^2 = \underbrace{1+x^2}_{c^2}\}$ È UN'ELLISSE





SE FISSO y TROVO DELLE IPERBOLI $z^2 - x^2 = \underbrace{1-3y^2}_{c}$

(per $3y^2 < 1$) . . . .



(il disegno è impreciso - le sezioni dovrebbero essere più schiacciate rispetto a z)

IN OGNI CASO È CONFERMATO CHE ϕ NON È

NÉ ≥ 0 NÉ ≤ 0

DOMANI COMINCIO A PARLARE DI

CURVE: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^N$

(o $[a,b] \subset \mathbb{R}$)