Analisi Matematica II
Lezione 04
05 ottobre 2015

- $\phi(x,y) = -x^2 + 10xy - y^2$

ϕ è una forma quadratica ?? SI

come costruisco la matrice A associata a ϕ?

POSSO FARE IN VARI MODI

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

È DIAGONALE

VEDIAMO SE È DEFINITA POS/NEG ??

Basta calcolare $a_{11} = -1$ e $\det A = (-1)(-1) - 5 \cdot 5 = 1-25$

NEGATIVI ENTRAMBI

INDEFINITA

Non ho tutti autov. > 0 ($a_{11} > 0$, det $A > 0$)

Non ho tutti autov. < 0 ($a_{11} < 0$, det $A > 0$)

Se det < 0 (in dimensione $N=2$) $\Rightarrow$ INDEFINITA perché

$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Per fare una verifica calcoliamo gli autovalori λ_1 e λ_2.

POL. CARATT. $P(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (1+\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 + 2\lambda - 24$ RADICI $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+24} = -1 \pm 5$

$= \begin{cases} -6 \\ +4 \end{cases}$ $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -6$

CERCO ANCHE GLI AUTOVETTORI

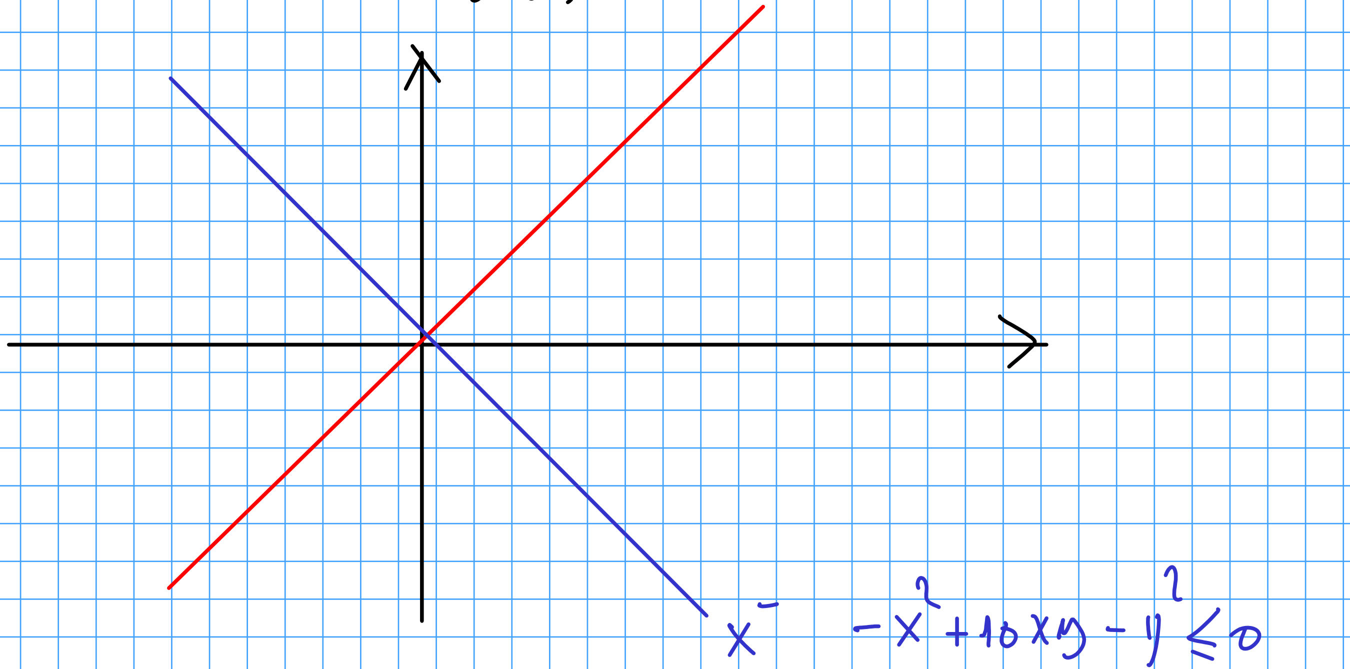
e_1 tale che $A e_1 = 4 e_1$ $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x + 5y = 4x \\ 5x - y = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases} \quad x = y$$

Per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ (se lo voglio di lunghezza 1)

Sfruttando la perpendicolarità $\Rightarrow$ $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

Per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$



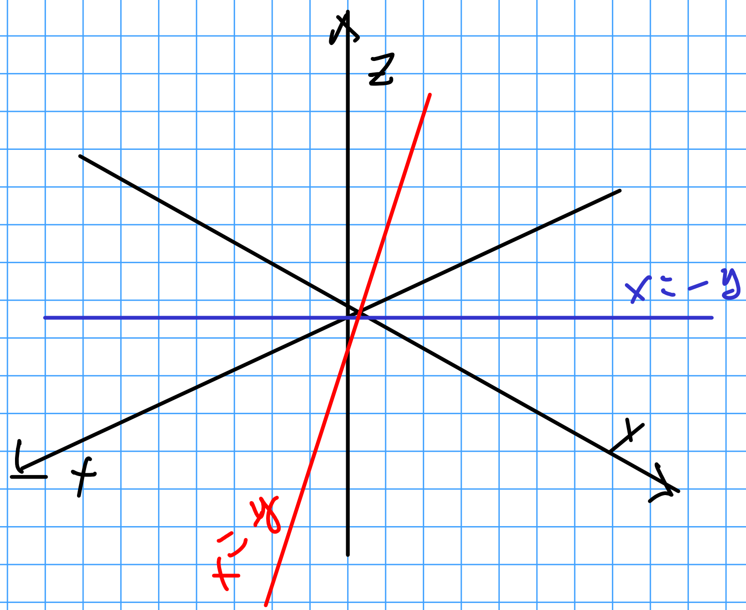
$X^+ =$ spazio generato da e_1 $=$ spazio su cui $\phi(x,y)$ è >0

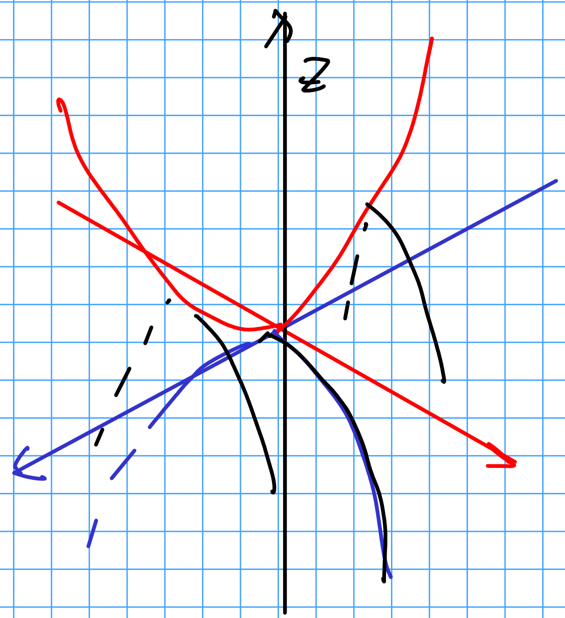
X^- " " " e_2 $=$ " " " $\phi(x,y)$ è <0

Se per esempio mi metto su X^+ $\Rightarrow$ $\phi(x,x) = -8x^2$

In effetti $\underset{\alpha^2\phi(e_1)}{\phi(\alpha e_1)} = \alpha^2 \lambda_1 \|e_1\|^2$ $\Big|$ $\overset{\shortparallel}{\lambda_1} \|(x,x)\|^2 = -4(x^2+x^2) = -8x^2$

IL GRAFICO (IN $\mathbb{R}^3$) di $z = \phi(x,y)$ PIÙ/MENO





L'ORIGINE È "PUNTO DI SELLA"

$\phi(x,y) = -x^2 + 10xy - y^2$ che in coordinate fatte rispetto agli autovettori diventa

$$\phi(x', y') = +4(x')^2 - 6(y')^2$$

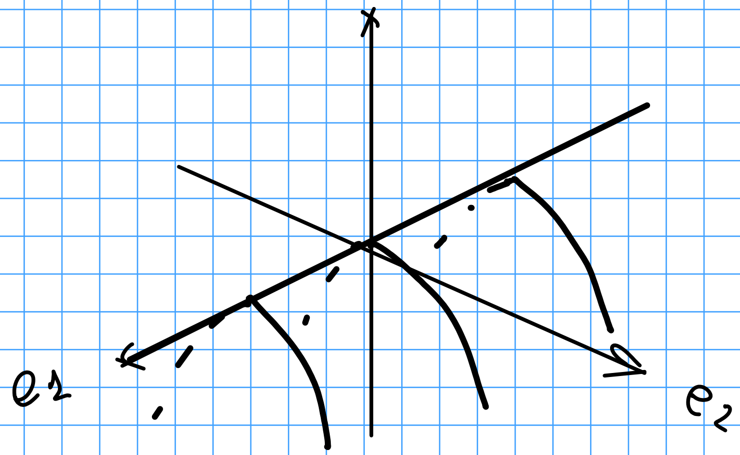
• $\phi(x,y) = -x^2 + 2\sqrt{2}\,xy - 2y^2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -1$ $\quad\quad$ $\det A = (-1)(-2) - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 0$

SEMIDEFINITA NEGATIVA (UN AUTOVALORE NULLO E UNO <0 – STO USANDO IL FATTO CHE DIMENSIONE $= 2$), DUNQUE

$\phi(x,y) \leq 0$



$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 < 0$

VEDIAMO CHI SONO λ_1, λ_2 e_1 e_2.

Polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{bmatrix} =$

$(1+\lambda)(2+\lambda) - 2 = \lambda^2 + 3\lambda \qquad \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -3$

AUTOVETTORE CON $\lambda_1 = 0$

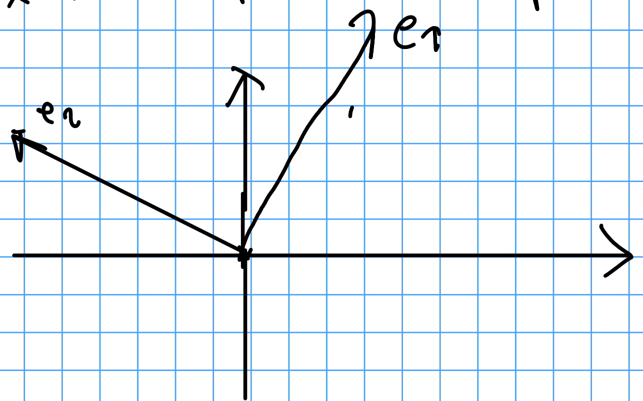
$$\begin{cases} -x + \sqrt{2}\, y = 0 \\ \sqrt{2}\, x - 2y = 0 \end{cases} \qquad x = \sqrt{2}\, y \qquad e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, y \\ y \end{pmatrix}$$

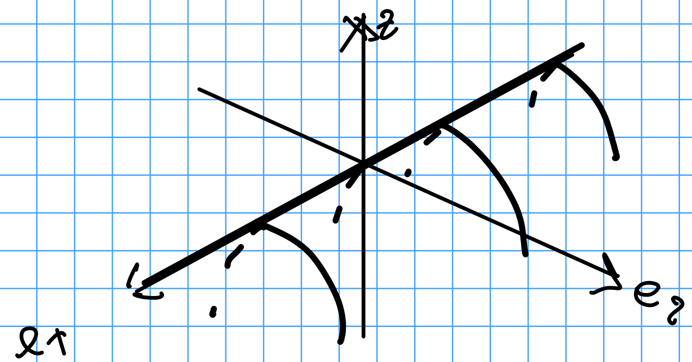
Se lo voglio di norma 1 $\Rightarrow$ $2y^2 + y^2 = 1 \qquad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

quindi $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$ (o il suo opposto)

AUTOVETTORE e_2 con $\lambda_2 = -3$ (uso l'ortogonalità!)

$\begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}\, x \end{pmatrix}$ per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$





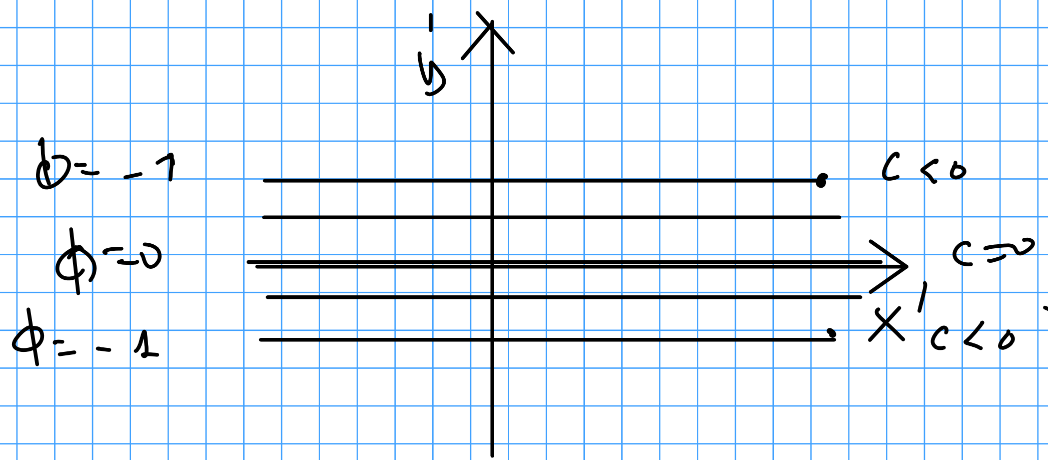
Se voglio studiare le "linee di livello"

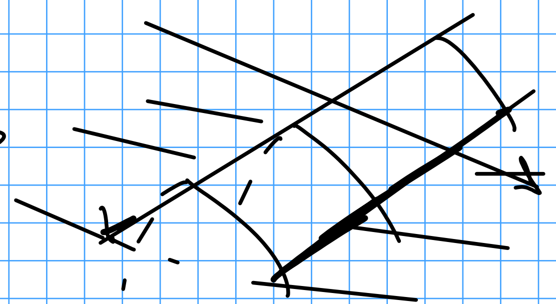
$$\{\phi(x,y) = c\} \quad , \text{ al variare di } c \in \mathbb{R}$$

Mi metto nella base (e_1, e_2) con coordinate (x', y')

$\Rightarrow \phi(x', y') = -3(y')^2$, ALLORA

$$\{(x', y') : \phi(x', y') = c\} = \begin{cases} \emptyset \text{ VUOTO} & \text{se } c > 0 \\ \{y' = 0\} & \text{se } c = 0 \\ \left\{y' = \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{3}}\right\} \cup \left\{y' = -\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{3}}\right\} & \text{se } c < 0 \end{cases}$$





TORNIAMO AL PRIMO ESERCIZIO

$$\Phi(x, y) = -x^2 + 10xy - y^2$$

RISPETTO A (e_1, e_2)

$$\Phi(x', y') = +4(x')^2 - 6(y')^2$$

LINEE DI LIVELLO $\Phi(x', y') = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

$$\boxed{\Phi(x', y') = 0} \iff 4(x')^2 - 6(y')^2 = 0 \iff$$

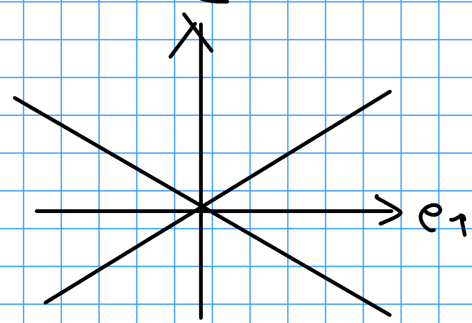
$$(2x' + \sqrt{6}\, y')(2x' - \sqrt{6}\, y') = 0$$

$\iff$ $2x' + \sqrt{6}\, y' = 0$

OPPURE

$2x' - \sqrt{6}\, y' = 0$

COPPIA DI RETTE



$$\boxed{\phi(x', y') = 1} \iff 4(x')^2 - 6(y')^2 = 1$$